Lyhyt MATIKKA 2
Geometria

Arno Aalto
Jukka Kangasaho
Outi Kylliäinen
Arja Metiäinen
Jukka Mäkinen
Jorma Tahvanainen

Sanoma Pro Oy
Helsinki

Tiedustelut
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti:
asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
Tämä aineisto on digitaalinen
rinnakkaisversio tuotteesta
ISBN 978-952-63-1497-6
Lyhyt matikka 2 Geometria

12 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1887-5
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-1888-2

Toimitus: Ville Sipiläinen
Ulkoasu: Sari Jeskanen
Taitto: Eija Högman
Kuvitus: Timo Mäkelä ja
Marja Venäläinen
Kuvatoimitus: Anita Kokkila

© Arno Aalto, Jukka Kangasaho,
Outi Kylliäinen, Arja Metiäinen,
Jukka Mäkinen, Jorma Tahvanainen
ja Sanoma Pro Oy

Kopiointiehdot
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

Käyttäjälle

Lyhyt matikka

Matematiikkaa käytetään hyväksi lähes kaikilla tiedon aloilla, luonnontieteiden ja tekniikan lisäksi myös yhteiskunnallisilla ja humanistisilla aloilla. Yhä useammin uuden tiedon omaksuminen opinnoissa ja työelämässä edellyttää matematiikan tietoja.

Lyhyt matikka -sarjan tavoitteena on, että jokainen oppilas oppii tarpeellisia matematiikan tietoja ja taitoja, omaksuu myönteisen asenteen matematiikkaan ja tottuu luottamaan kykyynsä oppia matematiikkaa.

Eteneminen

Luvun avaa aihepiiriin johdatteleva ongelma tai johdantoesimerkki. Seuraavat esimerkit opastavat löydetyn tiedon hyväksikäyttöön ja syventämiseen. Esimerkit on laadittu niin, että opiskelijat voivat omaksua ne itsenäisesti. Tuntityöskentelyssä voidaan jo aikaisessa vaiheessa siirtyä harjoitteluun, jolloin oppilaat etenevät omassa tahdissaan kirjan esimerkkejä hyödyntäen.

Harjoittelu

Lukujen harjoitukset ovat kahtena vaativuudeltaan samantasoisena sarjana. Sarjaa I voidaan käyttää harjoitteluun oppitunnilla ja sarjasta II voidaan valikoida kotitehtävät.

Symbolinen laskin

Oppikirja tukee symbolisen laskimen hyödyntämistä opiskelussa. Oleelliset kohdat, joissa neuvotaan laskimen käyttöä, on merkitty marginaalissa olevalla laskinsymbolilla.

Kertaaminen

Koko kurssi voidaan kerrata kertausluvun avulla. Kertauslukua seuraavat samojen otsikoiden mukaan järjestetyt kertaustehtävät, ja kertausosuuden päättää kolme tehtäväsarjaa.

Geometria

Kurssilla opiskellaan tason ja avaruuden geometriaa. Lasketaan kulmia, pituuksia, pinta-aloja ja tilavuuksia sekä opitaan tasokuvioiden ja kappaleiden ominaisuuksia.

Toivotamme innostavia ja tuloksellisia työskentelyhetkiä.

Helsingissä 14.3.2013

Tekijät

Sisällys

Kuvioiden yhdenmuotoisuus 4
Kolmioiden yhdenmuotoisuus 13
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde 20
Kulman tangentti, sini ja kosini 28
Trigonometrian käyttöä 37
Pythagoraan lause 42
Monikulmiot, suunnikas ja puolisuunnikas 49
Ympyrä ja säännölliset monikulmiot 60
Ympyrän kehän ja kaaren pituus 66
Ympyrän ja sektorin pinta-ala 73
Ympyrän tangentti 79
Suorakulmainen särmiö 85
Lieriö 91
Kartio 100
Pallo 110
Harjoituksia avaruusgeometriasta 119

Kertaus 121
Kertaustehtäviä 133
Tehtäväsarjoja 138
Vastaukset 140
Hakemisto 162
Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä 167

Ajankäyttöehdotus

Tässä ajankäyttöehdotuksessa kurssin opiskeluun käytetään 15 75 minuutin pituista oppituntia.

Luku	**Tunteja**
Kuvioiden yhdenmuotoisuus	1
Kolmioiden yhdenmuotoisuus	1
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde	1
Kulman tangentti, sini ja kosini	1
Trigonometrian käyttöä	1
Pythagoraan lause	1
Monikulmiot, suunnikas ja puolisuunnikas	1
Ympyrä ja säännölliset monikulmiot	1
Ympyrän kehän ja kaaren pituus	1
Ympyrän ja sektorin pinta-ala	1
Ympyrän tangentti	1
Suorakulmainen särmiö	1
Lieriö	1
Kartio	1
Pallo	1

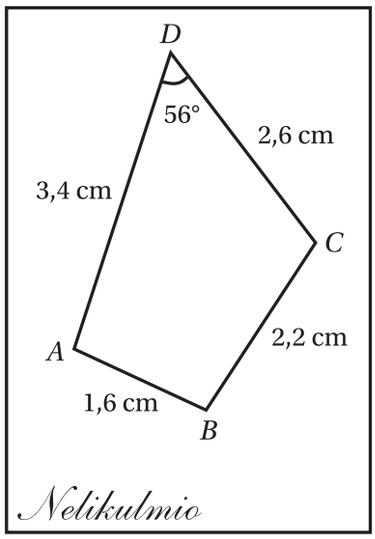
7 Kuvioiden yhdenmuotoisuus

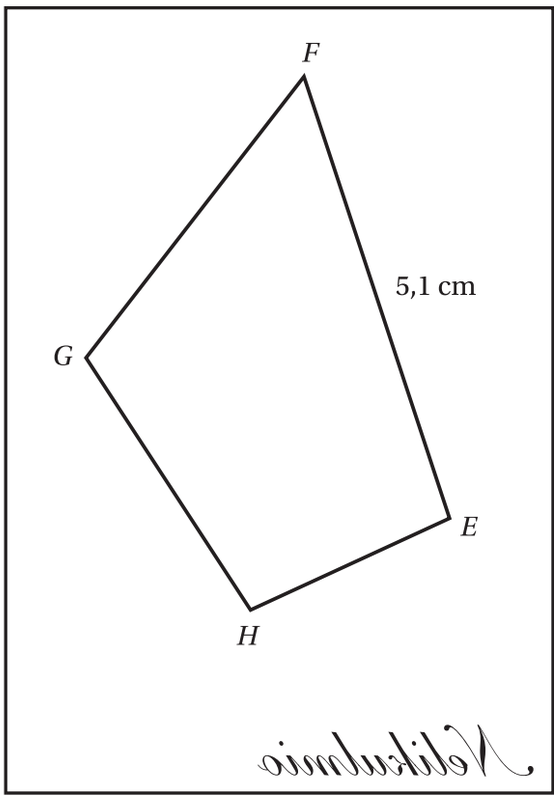
ONGELMA

Valokopiokoneella kuvio voidaan kopioida pienennettynä tai suurennettuna. Kalvolle piirretty kuvio kopioitiin paperille suurennettuna. Kopioitaessa kalvo oli erehdyksessä nurinpäin.

a) Kuinka suuri suurennetun kuvion kulma F on?

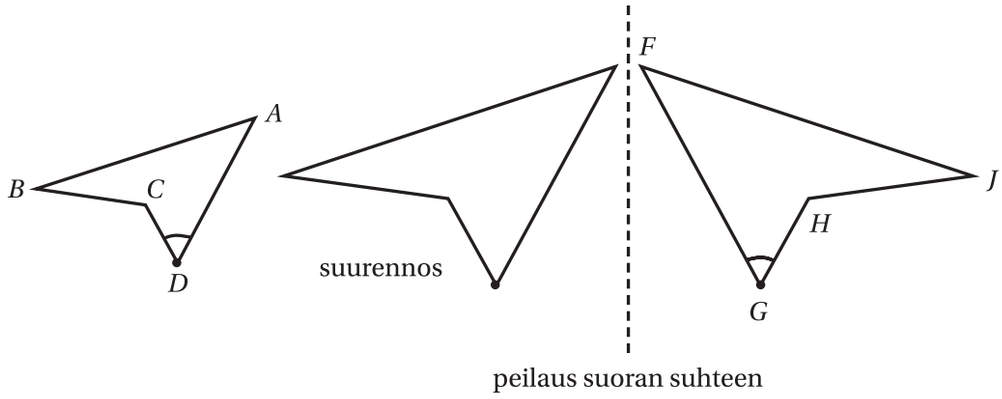
b) Suurennetusta kuviosta mitattiin sivu EF. Kuinka pitkät suurennetun kuvion muut sivut ovat?





Yhdenmuotoisuus

Kuviot, jotka saadaan toisistaan suurentamalla, pienentämällä tai peilaamalla, ovat *yhdenmuotoiset.*



Nelikulmiot $ABCD$ ja $FGHJ$ ovat yhdenmuotoiset.

Kuvion jokaista kulmaa vastaa yhdenmuotoisessa kuviossa *vastinkulma*. Kulma ja sen vastinkulma ovat yhtä suuret.

Yllä olevissa nelikulmioissa esimerkiksi kulman ADC vastinkulma on kulma HGF. Siis $\sphericalangle ADC = \sphericalangle HGF$.*

Kuvion jokaista janaa vastaa yhdenmuotoisessa kuviossa *vastinjana*. Kun yhdenmuotoisissa kuvioissa muodostetaan mikä tahansa suhde

$$\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}},$$

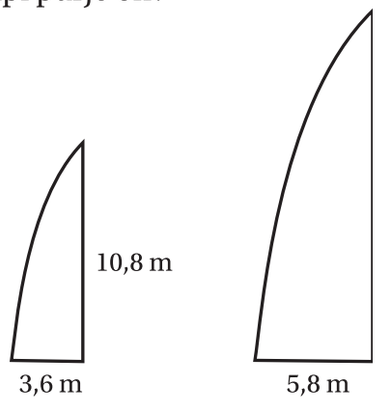
niin suhde on aina sama. Tämä suhde on *yhdenmuotoisuussuhde* eli *mittakaava*.

Yllä olevissa nelikulmioissa esimerkiksi janan AB vastinjana on FJ ja janan BC vastinjana on JH. Siis $\frac{FJ}{AB} = \frac{JH}{BC}$.

* Kun kulmia merkitään kolmella kirjaimella, niin kulman kärkipiste merkitään keskimmäiseksi. Jos sekaannuksen mahdollisuutta ei ole, kulma voidaan merkitä myös pelkän kärkipisteen avulla, esimerkiksi $\sphericalangle ADC = \sphericalangle D$.

ESIMERKKI 1

Kahdessa erikokoisessa purjeveneessä on yhdenmuotoiset isopurjeet. Kuinka korkea suurempi purje on?



RATKAISU

Merkitään suuremman purjeen korkeutta kirjaimella x.

Koska purjeet ovat yhdenmuotoiset, niin purjeiden korkeuksien suhde on yhtä suuri kuin purjeiden leveyksien suhde. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{x}{10{,}8} = \frac{5{,}8}{3{,}6}$$

$x = 17{,}4\ (\text{m})$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Verrantoyhtälö voidaan ratkaista myös kertomalla ristiin.

$$\frac{x}{10{,}8} = \frac{5{,}8}{3{,}6}$$

$3{,}6x = 5{,}8 \cdot 10{,}8 \quad | : 3{,}6$

$$x = \frac{5{,}8 \cdot 10{,}8}{3{,}6} = 17{,}4\ (\text{m})$$

VASTAUS

17,4 m

Vastinjanan pituuden määrittäminen

Jos tunnetaan janan pituus, niin vastinjanan pituus yhdenmuotoisessa kuviossa ratkaistaan verrantoyhtälöllä. Verrantoyhtälö voidaan muodostaa, kun tunnetaan yhdenmuotoisuussuhde (mittakaava).

Edellisessä esimerkissä yhdenmuotoisuussuhde oli tunnettujen osien pituuksien suhde $\frac{5{,}8}{3{,}6}$. Seuraavassa esimerkissä yhdenmuotoisuussuhde (mittakaava) on annettu.

ESIMERKKI 2 Maastokartalla, jonka mittakaava on $1 : 20\,000$, saaren pituus on $9{,}7$ cm. Kuinka pitkä saari on?

RATKAISU Saaren kuva kartalla ja saari ovat yhdenmuotoiset. Kartalta mitatun etäisyyden suhde todelliseen etäisyyteen on $1 : 20\,000$.

Olkoon x saaren todellinen pituus senttimetreinä. Muodostetaan ja ratkaistaan verrantoyhtälö.

$$\frac{9{,}7 \text{ cm}}{x} = \frac{1}{20\,000}$$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

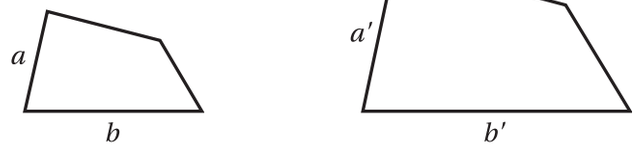
$$x = 194\,000 \text{ cm} = 1\,940 \text{ m} = 1{,}94 \text{ km} \approx 1{,}9 \text{ km}^*$$

VASTAUS 1,9 km

Yhdenmuotoisista kuvioista voidaan muodostaa verrantoyhtälöitä kahdella tavalla:

Alla olevat kuviot ovat yhdenmuotoiset, joten sivun a ja vastinsivun a' pituuksien suhde on yhtä suuri kuin sivun b ja vastinsivun b' pituuksien suhde.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$



Ristiin kertomalla saadaan yhtälö $ab' = a'b$.

Toisaalta myös verranto $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ johtaa ristiin kerrottaessa samaan yhtälöön $ab' = a'b$.

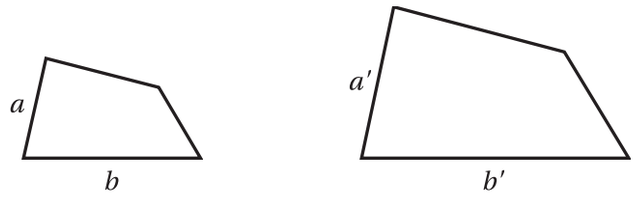
Yhtälössä $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ on vasemmalla puolella saman kuvion kahden janan pituuksien suhde ja oikealla puolella näiden toisessa kuviossa olevien vastinjanojen pituuksien suhde.

* Kirjan lopussa sivulla 167 on liite pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköistä ja yksikkömuunnoksista.

Toinen keino muodostaa verranto

Jos kuviot ovat yhdenmuotoiset, niin saman kuvion kahden janan suhde on yhtä suuri kuin niiden toisessa kuviossa olevien vastinjanojen suhde.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$$

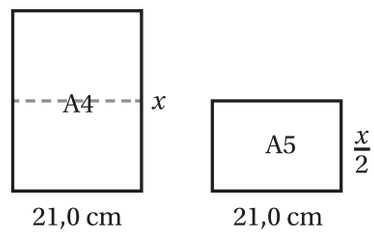


ESIMERKKI 3

A4-paperiarkin muoto on valittu täyttämään seuraava ehto: jos arkki puolitetaan keskeltä lyhyemmän sivun suuntaisesti, niin puolikas arkki (A5-arkki) on yhdenmuotoinen koko arkin kanssa. A4-arkin lyhyemmän sivun pituus on 21,0 cm. Kuinka pitkä A4-arkin pitempi sivu on?

RATKAISU

Olkoon x A4-arkin pitemmän sivun pituus senttimetreinä. Tällöin A5-arkin lyhyemmän sivun pituus on $\frac{x}{2}$.



Muodostetaan molemmissa arkeissa lyhyemmän sivun pituuden suhde pitemmän sivun pituuteen. Koska arkit ovat yhdenmuotoiset, suhteet ovat yhtä suuret.*

$$\frac{21{,}0}{x} = \frac{\frac{x}{2}}{21{,}0}$$

$x \approx -29{,}7$ tai $x \approx 29{,}7$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Vain positiivinen juuri voi olla sivun pituus. Arkin pitemmän sivun pituus on 29,7 cm.

VASTAUS

29,7 cm

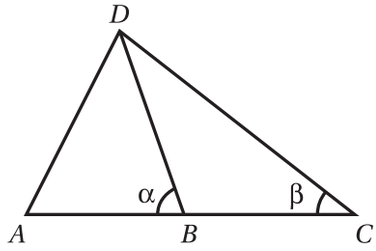
---

* Nyt siis muodostetaan verrantoyhtälö vertaamalla kuvioiden sisällä muodostettuja suhteita. Voitaisiin myös verrata suhteita $\frac{\text{jana}}{\text{vastinjana}}$, jolloin saataisiin yhtälö $\frac{x}{21{,}0} = \frac{21{,}0}{\frac{x}{2}}$ (pitempien sivujen suhde on yhtä suuri kuin lyhyempien sivujen suhde).

HARJOITUKSIA

Sarja I

1. Merkitse kulmat α ja β, jos mahdollista, myös yhdellä ja kolmella kirjaimella.*

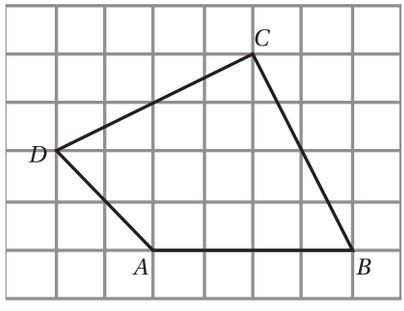


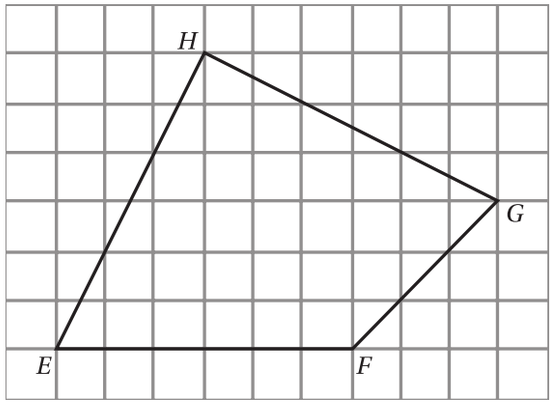
2. Nelikulmio $EFGH$ on saatu nelikulmiosta $ABCD$ ensin suurentamalla ja sitten peilaamalla suoran suhteen.

a) Mitkä ovat nelikulmion $ABCD$ kulmien B ja D vastinkulmat nelikulmiossa $EFGH$?

b) Mitkä ovat nelikulmion $ABCD$ sivujen AD ja BC vastinsivut nelikulmiossa $EFGH$?

c) Mikä on nelikulmioiden $EFGH$ ja $ABCD$ yhdenmuotoisuussuhde?



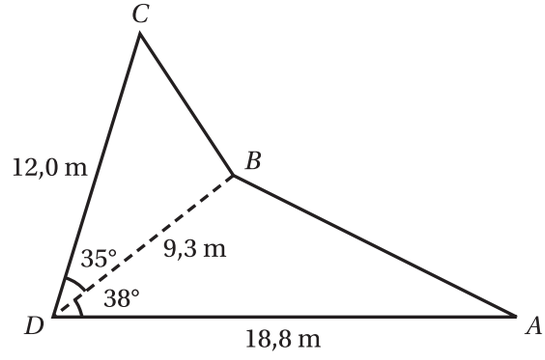


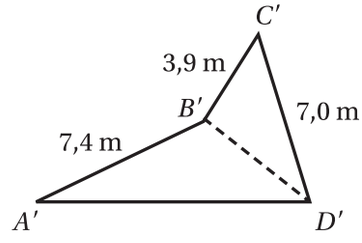
3. Nelikulmiot $ABCD$ ja $A'B'C'D'$ ovat yhdenmuotoiset.

a) Laske sivun AB pituus.

b) Laske lävistäjän $B'D'$ pituus.

c) Kuinka suuri kulma $C'D'A'$ on?





4. Kuviosta, jonka korkeus on 17,3 cm, otetaan pienennetty valokopio. Kopiossa kuvion korkeus on 12,8 cm.

a) Kuvion leveys on 8,2 cm. Mikä kuvion leveys on pienennöksessä?

b) Pienenettyyn kuvioon piirretyn kuvion lävistäjän pituus on 14,7 cm. Mikä vastaavan lävistäjän pituus on alkuperäisessä kuviossa?

5. Mitä todellista etäisyyttä kartalta mitattu 8,7 senttimetrin etäisyys vastaa, jos kartan mittakaava on

a) 1 : 50 000 (useat ulkoilukartat)

b) 1 : 1 500 000 (valtakunnan kartta)?

---

* Kirjain α on kreikan aakkosten pieni alfa ja kirjain β on kreikan aakkosten pieni beeta. Kulmia merkittäessä käytetään usein myös kreikan aakkosten kirjaimia γ (gamma) ja δ (delta).

6. Joensuun ja Kuopion etäisyys on 111 km. Mikä kaupunkien välinen etäisyys on

a) GT-kartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000

b) Pohjois-Euroopan kartalla, jonka mittakaava on 1 : 2 400 000?

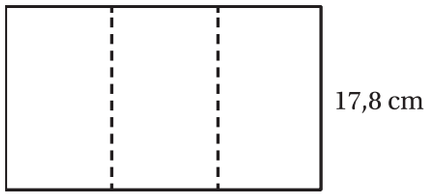
7. Mittakaavassa 300 : 1 piirretyssä kuvassa pölypunkin pituus on 8,3 cm. Kuinka pitkä pölypunkki on? Anna vastaus millimetreinä.

8. Rakennuksen leveys on 24,0 m. Suoraan edestä otetussa valokuvassa julkisivun leveys on 11,5 cm.

a) Rakennuksen korkeus valokuvassa on 5,4 cm. Kuinka korkea rakennus on?

b) Kahden parvekkeen välinen etäisyys valokuvassa on 1,7 cm. Mikä parvekkeiden välinen etäisyys on?

9. Kun suorakulmion muotoinen paperiarkki leikattiin lyhyemmän sivun suuntaisesti kolmeen yhtä suureen osaan, niin osat olivat yhdenmuotoisia koko arkin kanssa. Arkin lyhyemmän sivun pituus oli 17,8 cm. Mikä arkin pitemmän sivun pituus oli?

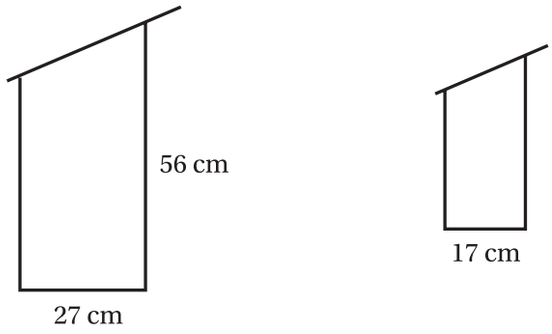


10. Jo antiikin ajan kreikkalaiset pitivät esteettisesti miellyttävänä suorakulmiota, jonka muoto täyttää seuraavan ehdon: Kun suorakulmiosta erotetaan lyhyemmän sivun suuntaisesti neliö, niin jäljelle jäävä suorakulmio on yhdenmuotoinen koko suorakulmion kanssa. Ehdon täyttävä suorakulmio on *kultainen suorakulmio*. Ateenassa Akropoliin kukkulalla olevan Parthenonin temppelin pääty on kultaisen suorakulmion muotoinen. Päädyn leveys on 31 metriä. Kuinka korkea temppelin pääty on?

11. Manner-Suomen suurin pituus Hangosta Utsjoelle on 1 157 kilometriä. Suurin leveys Närpiön Töjbystä Ilomantsin Virmajärvelle on 542 kilometriä. Mikä on suurin mittakaava, jota käyttäen piirretty Manner-Suomen kartta mahtuu kokonaan A5-arkille? A5-arkin mitat ovat 21,0 cm × 14,8 cm. Ilmaise mittakaava pyöristettynä muotoon 1 : n, missä kokonaisluvun n alussa on kaksi nollasta poikkeavaa lukua.

Sarja II

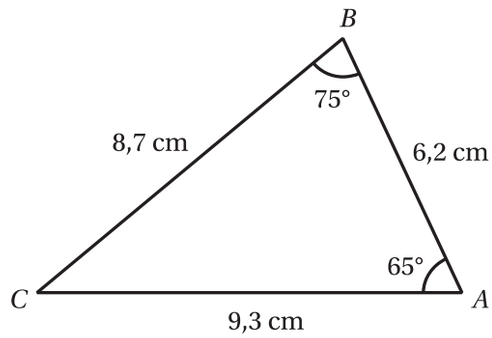
12. Linnunpöntöt ovat yhdenmuotoiset. Kuinka korkea pienempi pönttö on?

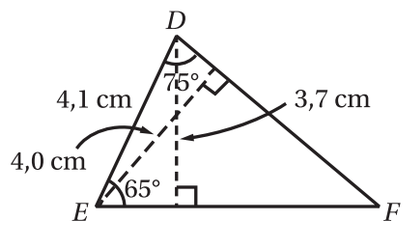


13. Kolmiot ABC ja DEF ovat yhdenmuotoiset. Kuinka pitkä on

a) kolmion DEF sivu EF

b) kärjestä B piirretty kolmion ABC korkeusjana?





14. Ovatko

a) kaikki neliöt

b) kaikki suorakulmiot

c) kaikki suunnikkaat

d) kaikki tasakylkiset kolmiot

e) kaikki tasasivuiset kolmiot

f) kaikki ympyrät

keskenään yhdenmuotoisia?

15. Maalauksesta, jonka leveys on 78 cm ja korkeus 48 cm, tehdään postikortti, jonka leveys on 14,7 cm ja korkeus 10,5 cm. Maalaus täyttää leveyssuunnassa koko kortin. Kuinka paljon tyhjää tilaa korttiin jää pystysuunnassa?

16. Mikropiirin leveys työpiirustuksessa, jonka mittakaava on 150 : 1, on 21,0 cm. Mikä mikropiirin leveys on? Anna vastaus millimetreinä.

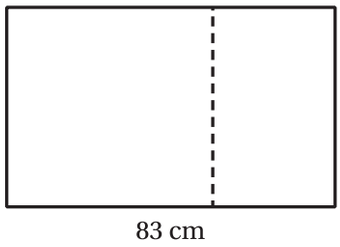
17. Peruskartan mittakaava on 1 : 20 000. Laske yhdelle karttalehdelle mahtuvan maa-alueen mitat ja pinta-ala. Karttalehden koko on 49,5 cm × 49,5 cm.

18. Kahden kiintopisteen etäisyydeksi tiedettiin 3,7 km. Kartalla kiintopisteiden etäisyys on 7,4 cm. Mikä kartan mittakaava on?

19. Maatilasta otetusta ilmakuvasta kahden sähköpylvään etäisyydeksi mitattiin 3,4 cm. Etäisyyden tiedettiin olevan 50 m. Pellon pituus samassa ilmakuvassa on 12,1 cm. Kuinka pitkä pelto on?

20. Mittaluku, jolla ilmaistaan television kuvaruudun koko, on ruudun lävistäjän pituus. 24 tuuman television kuvaruudun leveys on 53,1 cm. Kuinka leveä 34 tuuman television yhdenmuotoinen kuvaruutu on? Yksi tuuma on 25,40 mm.

21. Taiteilija hahmottelee maalausta kankaalle, jonka leveys on 83 cm ja korkeus 51 cm. Hän haluaa rajata oikeasta reunasta kankaan korkuisen alueen, joka on yhdenmuotoinen koko kankaan kanssa. Kuinka leveä alueen tulee olla?



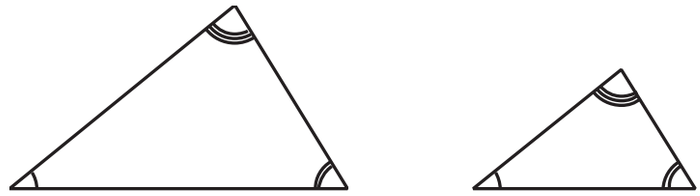
22. Suorakulmion muotoisen paperiarkin sivujen pituudet ovat 12 cm ja 40 cm. Arkki halutaan leikata lyhyemmän sivun suuntaisesti kahteen keskenään yhdenmuotoiseen osaan. Kuinka leikkaaminen on suoritettava?

2 Kolmioiden yhdenmuotoisuus

ONGELMA

Piirrä kaksi kolmiota, joissa molemmissa on 40°:n kulma ja 80°:n kulma. Vertaa kolmioiden muotoa.

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

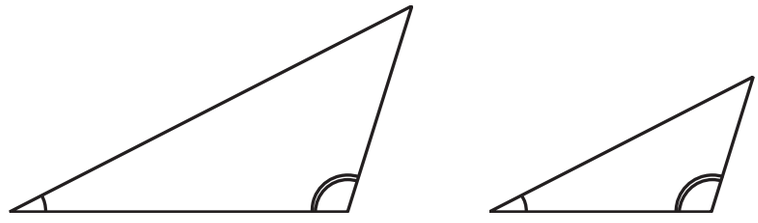


Kolmion kulmat määräävät täydellisesti kolmion muodon. Jos kolmion jokaista kulmaa vastaa yhtä suuri kulma toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

Koska kaikissa kolmioissa kulmien summa on 180°, niin jo kahden kulmaparin yhtäsuuruus takaa, että kolmannetkin kulmat ovat yhtä suuret.

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslause

Jos kolmion kahta kulmaa vastaavat yhtä suuret kulmat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*



Lauseeseen vedottaessa siitä käytetään usein lyhennettä **kk** (kaksi kulmaa).

---

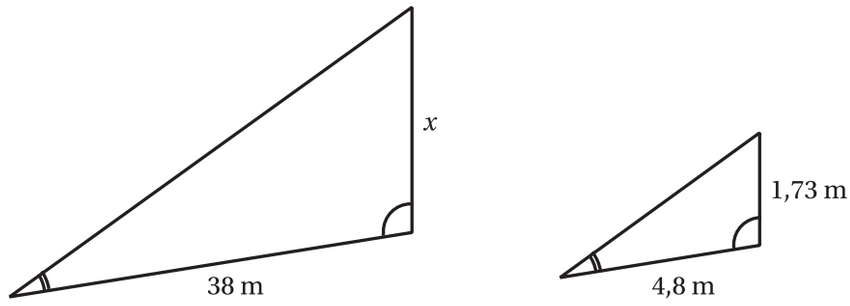
* Kuvioissa on merkitty, kuten usein on tapana, yhtä suuret kulmat yhtä monella kaarella.

ESIMERKKI 1

Kari ja Jaana määrittivät lipputangon pituuden. Auringon paistaessa he mittasivat, kuinka pitkä varjo lipputangosta ja Jaanasta lankesi tasaisesti viettävälle pihamaalle. Lipputangon varjon pituus oli 38 metriä ja Jaanan varjon pituus 480 cm. Jaana tiesi pituutensa olevan 173 cm. Kuinka pitkä lipputanko on?

RATKAISU

Piirretään mallikuviot.



Suuremmassa kolmiossa x on lipputangon pituus.

Lipputangon ja maanpinnan välinen kulma on yhtä suuri kuin Jaanan ja maanpinnan välinen kulma. Lisäksi valonsäteiden ja maanpinnan väliset kulmat ovat kolmioissa yhtä suuret. Siis kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).

Koska kolmiot ovat yhdenmuotoiset, lipputangon ja Jaanan pituuksien suhde on yhtä suuri kuin varjojen pituuksien suhde. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{x}{1{,}73} = \frac{38}{4{,}8}$$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

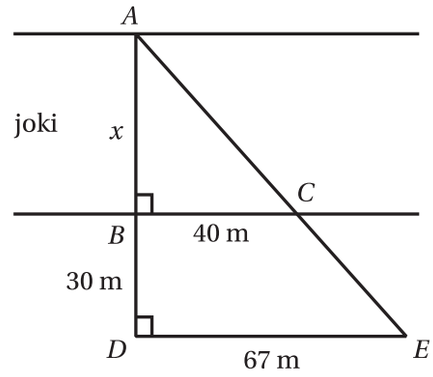
$$x \approx 14 \text{ (m)}$$

VASTAUS

14 m

ESIMERKKI 2

Joen leveys määritettiin tekemällä kuvion mukaiset mittaukset, joissa käytettiin kiintopisteenä vastarannalla pisteessä A olevaa kiveä. Määritä joen leveys x.



RATKAISU

Kolmioilla ABC ja ADE on yhteinen kulma A ja lisäksi molemmissa kolmioissa on suora kulma. Siis kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

Sivun AB vastinsivu on AD, ja sivun BC vastinsivu on DE.

$$\frac{x}{x+30} = \frac{40}{67}$$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

$$x \approx 44 \text{ (m)}$$

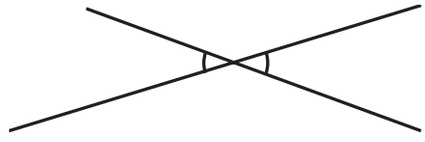
VASTAUS

44 m

Kulmat voidaan joskus havaita yhtä suuriksi seuraavilla perusteilla:

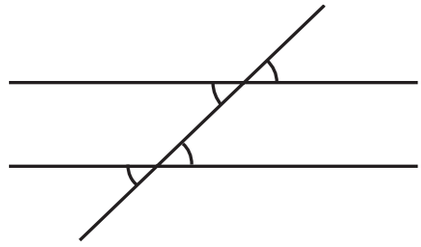
Ristikulmat

Kun kaksi suoraa leikkaa toisensa, niin muodostuvat *ristikulmat* ovat yhtä suuret.



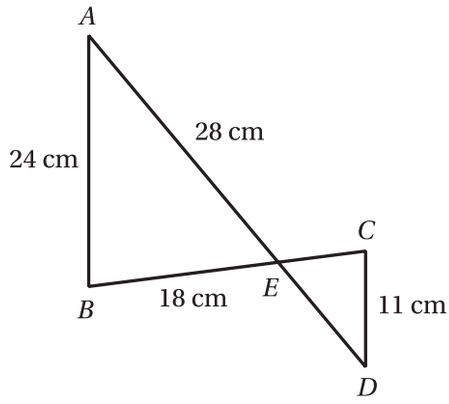
Samankohtaiset kulmat

Kun suora leikkaa kahta yhdensuuntaista suoraa, muodostuu neljä keskenään yhtä suurta kulmaa. Kulmat ovat niin sanottuja *samankohtaisia kulmia*.



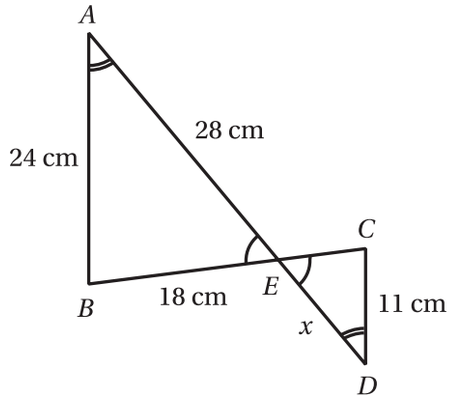
ESIMERKKI 3

Janat AB ja CD ovat yhdensuuntaiset. Kuinka pitkä jana DE on?



RATKAISU

Kolmioissa ABE ja CDE on yhtä suuret ristikulmat ja yhtä suuret samankohtaiset kulmat, joten kolmiot ovat yhdenmuotoiset (kk).



Muodostetaan ja ratkaistaan verrantoyhtälö.

$$\frac{DE}{AE} = \frac{CD}{AB}$$

Sivun DE vastinsivu on AE, ja sivun CD vastinsivu on AB.

$$\frac{x}{28} = \frac{11}{24}$$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

$$x \approx 13 \text{ (cm)}$$

VASTAUS

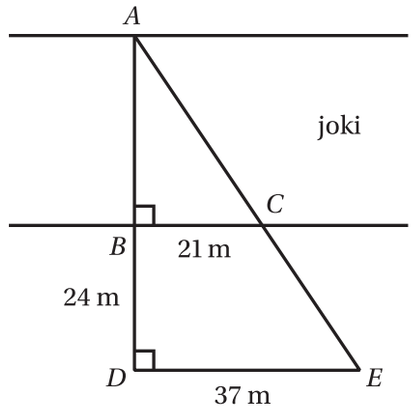
13 cm

HARJOITUKSIA

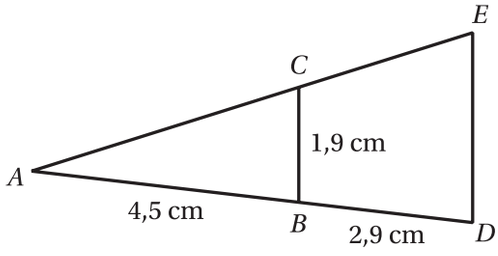
Sarja I

23. Tasaisesti viettävällä pihamaalla mitattiin puun varjon pituudeksi 31 m ja 1,5 m pitkän pystysuoran kepin varjon pituudeksi 2,6 m. Kuinka pitkä puu on?

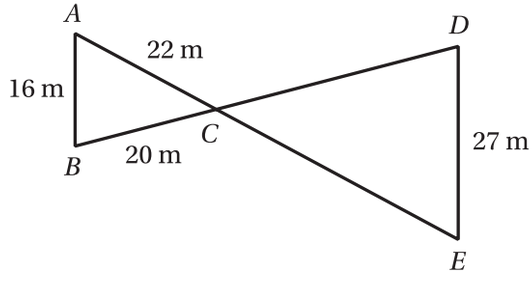
24. Joen leveys määritettiin tekemällä kuvion mukaiset mittaukset, joissa käytettiin kiintopisteenä vastarannalla pisteessä A olevaa puuta. Kuinka leveä joki on?



25. Janat BC ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske janan DE pituus.

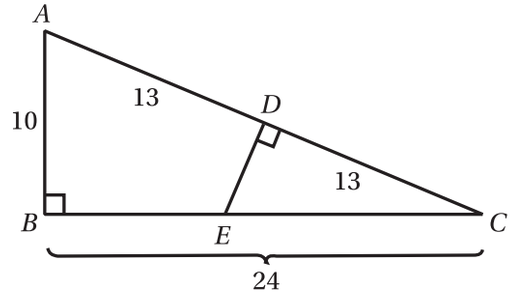


26. Janat AB ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske janan CD pituus.

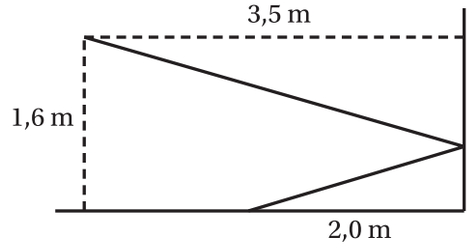


27. Lyijykynää, jonka pituus on 18 cm, pidetään ojennetussa kädessä pystysuorassa asennossa 80 cm:n etäisyydellä silmistä. Kun yhdellä silmällä katsoen tähdätään kohti 75 metrin päässä olevaa puuta, kynä juuri ja juuri peittää puun. Kuinka pitkä puu on?

28. Laske janojen DE ja CE pituus.
(Koska janojen pituuksilla ei ole yksikköjä, pituudet ovat niin sanottuja tarkkoja arvoja. Myös tehtävän vastaus on silloin annettava tarkkana arvona, ei likiarvona.)

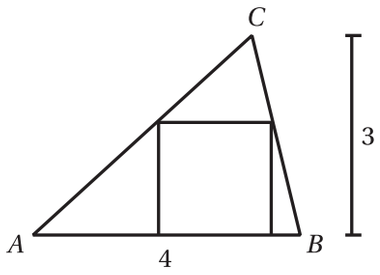


29. Squashpallo lyödään 1,6 metrin korkeudelta suoraan kohti 3,5 metrin päässä olevaa seinää kovalla kierteettömällä lyönnillä. Mille korkeudelle lyönti tulee tähdätä, jotta pallo seinästä kimmottuaan kohtaisi lattian 2,0 metrin päässä seinästä? Kun pallo kimpoaa seinästä, se jättää seinän samassa kulmassa, jossa se kohtaa seinän.



30. Kun metrin pituista tauluviivainta pidettiin vaakasuorassa kattolampun alapuolella 120 cm:n korkeudella lattiasta, viivaimesta lankesi lattialle 140 cm:n pituinen varjo. Kuinka korkealla kattolamppu on?

31. Kolmion ABC sivun AB pituus on 4 ja kolmion korkeus 3. Kolmion sisään on piirretty neliö, jonka yksi sivu on sivulla AB ja vastakkaisen sivun päätepisteet ovat kolmion sivuilla. Kuinka pitkä neliön sivu on?

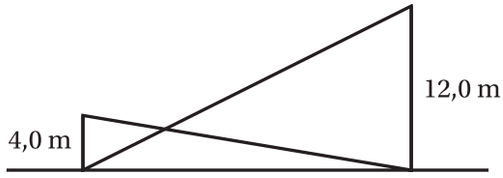


32. Kaksi pylvästä, joiden korkeudet ovat 4,0 metriä ja 12,0 metriä, on tuettu toisiinsa vaijereilla kuvion mukaisesti. Millä korkeudella vaijerit kohtaavat toisensa, jos pylväiden etäisyys toisistaan on

a) 24 metriä

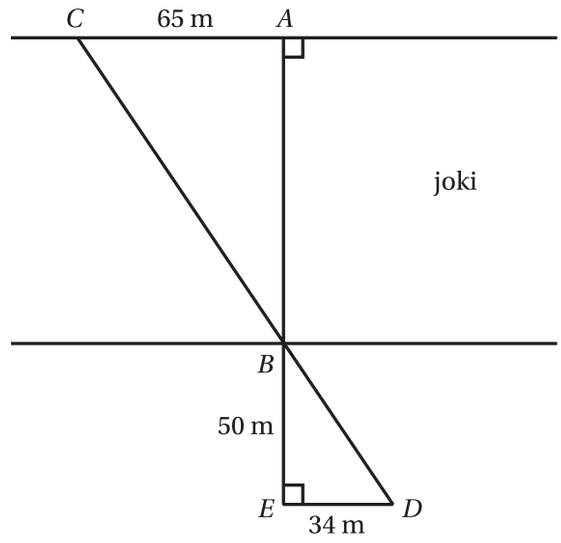
b) 36 metriä?

(Ohje: Laske ensin kohtaamispisteen etäisyys toisesta pylväästä.)

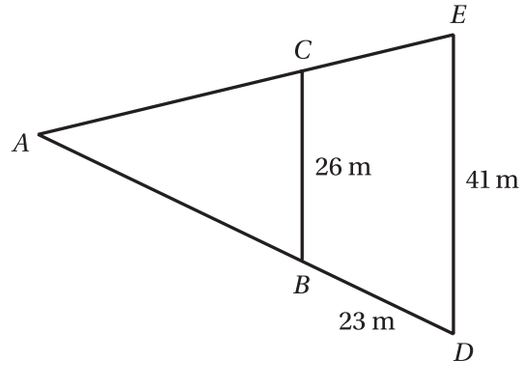


Sarja II

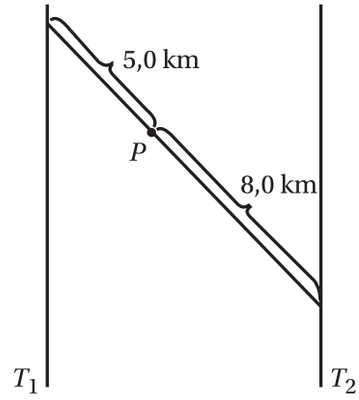
33. Joen leveys määritettiin käyttämällä hyväksi vastarannalla sijaitsevia kiintopisteitä A ja C, joiden välinen etäisyys tiedettiin. Kuinka leveä joki on?



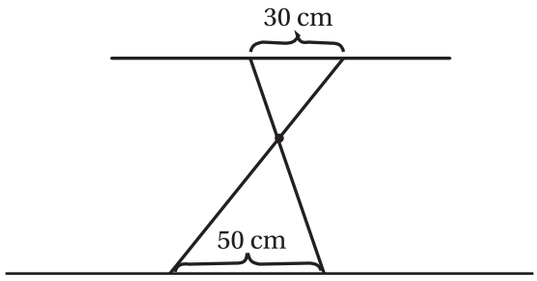
34. Janat BC ja DE ovat yhdensuuntaiset. Laske janan AB pituus.



35. Yhdensuuntaisten teiden T_1 ja T_2 etäisyys on 9,0 km. Laske talon P etäisyys molemmista teistä.



36. Silityslaudan korkeus on 70 cm. Millä korkeudella silityslaudan jalkojen nivel on?

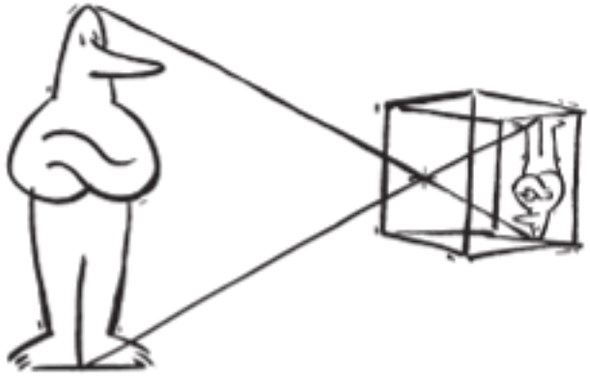


37. Katsoja näkee sähköpylvään huipun peilikuvan pienessä vesilammikossa. Katsojan silmät ovat 180 cm:n korkeudella, katsojan jalkojen etäisyys lammikosta on 1,2 m ja lammikon etäisyys pylväästä 5,0 m. Kuinka korkea pylväs on? (Kun valonsäteet heijastuvat lammikosta, ne jättävät pinnan samassa kulmassa, jossa ne kohtaavat pinnan.)

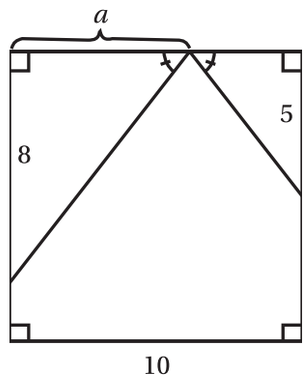
38. Ensimmäiset kamerat olivat niin sanottuja neulanreikäkameroita. Valonsäteet tulivat sisään kameraan pienen reiän kautta, ja kuva valottui kameran takaseinällä olevalle lasilevylle. Henkilö, jonka pituus on 180 cm, on kuvattava neulanreikäkameralla, jossa reiän etäisyys takaseinästä on 25 cm.

a) Henkilö seisoo 4,5 metrin etäisyydellä neulanreiästä. Kuinka korkea hän on lasilevylle piirtyvässä valokuvassa?

b) Lasilevyn korkeus on 16 cm. Kuinka etäällä kamerasta henkilön tulee olla, jotta hänen kuvansa mahtuisi lasilevylle?



39. Kuinka pitkä jana a on?



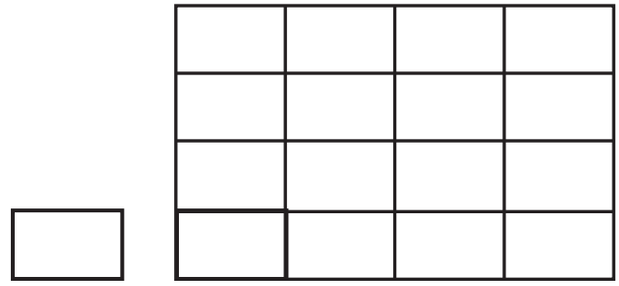
40. Vartiotornin korkeus on 15 metriä, ja 40 metrin etäisyydellä tornista on 3,0 metriä korkea muuri. Voidaanko tornista havaita 170 cm pitkä henkilö, joka on muurin takana 4,0 metrin etäisyydellä muurista?

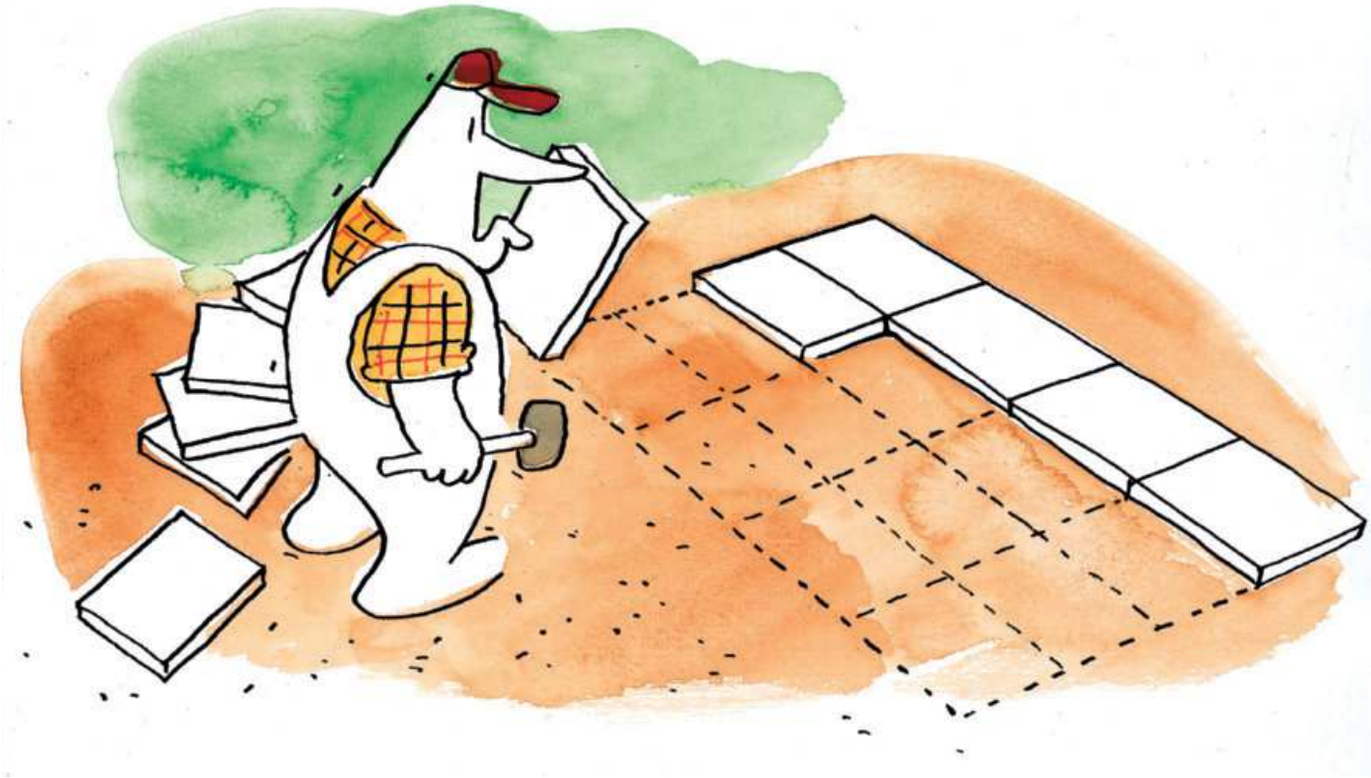
41. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 4 ja 7. Kolmion sisään on piirretty neliö, jonka kaksi sivua ovat kateeteilla (suoran kulman kyljillä) ja yksi kärki on hypotenuusalla. Kuinka pitkä neliön sivu on?

3 Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

ONGELMA

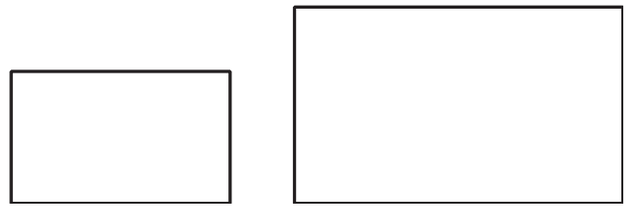
Suorakulmio suurennetaan niin, että sen sivut tulevat nelinkertaisiksi. Kuinka monta alkuperäistä suorakulmiota mahtuu suurennettuun suorakulmioon? Entä kuinka monta mahtuu, jos sivut tulevat suurennoksessa 15-kertaisiksi?





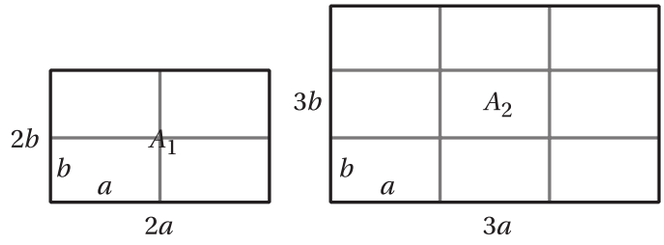
JOHDANTO-ESIMERKKI 1

Suorakulmiot ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{2}{3}$. Mikä suorakulmioiden pinta-alojen suhde on?



RATKAISU

Merkitään pienemmän suorakulmion sivuja $2a$ ja $2b$, jolloin isomman suorakulmion sivut ovat $3a$ ja $3b$.



Pienemmän suorakulmion pinta-ala on

$A_1 = 2a \cdot 2b = 4ab.$

Suuremman suorakulmion pinta-ala on

$A_2 = 3a \cdot 3b = 9ab.$

Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4\cancel{ab}}{9\cancel{ab}} = \frac{4}{9}.$$

Suhde $\frac{4}{9}$ on yhdenmuotoisuussuhteen neliö: $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

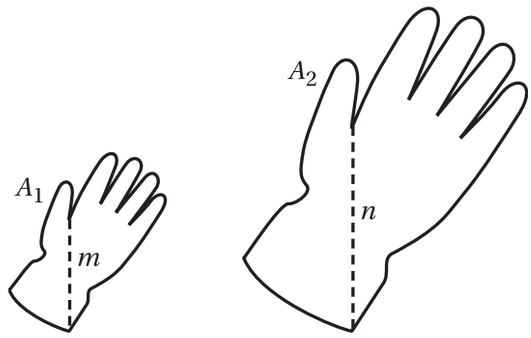
VASTAUS

$\frac{4}{9}$

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

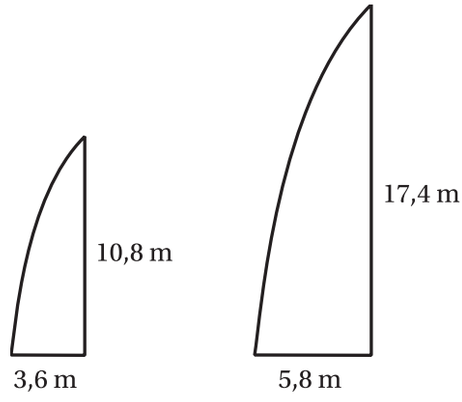
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisuussuhteen (mittakaavan) toinen potenssi eli neliö.
Jos kuviot ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{m}{n}$, niin kuvioiden pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$



ESIMERKKI 2

Kahdessa erikokoisessa purjeveneessä on yhdenmuotoiset isopurjeet. Kuinka monta prosenttia pienemmän purjeen pinta-ala on isomman purjeen pinta-alasta?



RATKAISU

Purjeiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen neliö.

Yhdenmuotoisuussuhde on janan ja sen vastinjanan pituuksien suhde $\frac{3{,}6}{5{,}8}$ (tai yhtä suuri suhde $\frac{10{,}8}{17{,}4}$).

Pinta-alojen suhde on

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{3{,}6}{5{,}8}\right)^2 \approx 0{,}39.$$

Suhde ilmaistaan prosentteina: $0{,}39 \approx 39\ \%$.

VASTAUS

39 %

ESIMERKKI 3

Kartan mittakaava on $1 : 50\,000$. Järven pinta-ala kartalla on $5{,}7\ \text{cm}^2$. Mikä järven pinta-ala on?

RATKAISU

Järven kuva kartalla ja järvi ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{1}{50\,000}$. Kartalta mitatun pinta-alan ja todellisen pinta-alan A suhde on mittakaavan neliö.

$$\frac{5{,}7\ \text{cm}^2}{A} = \left(\frac{1}{50\,000}\right)^2$$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.*

$$A = 1{,}425 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2$$

Laskimen näyttö: 1.425E10.

$$= 1{,}425 \cdot 10\,000\,000\,000\ \text{cm}^2$$

Eksponentti 10 ilmaisee nollien lukumäärän.

$$= 14\,250\,000\,000\ \text{cm}^2$$

$$= 1\,425\,000\ \text{m}^2$$

$1\ \text{m}^2 = 10\,000\ \text{cm}^2$ **

$$= 1{,}425\ \text{km}^2$$

$1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$

$$\approx 1{,}4\ \text{km}^2$$

VASTAUS

$1{,}4\ \text{km}^2$

ESIMERKKI 4

Suomen pinta-ala on $337\,000\ \text{km}^2$. Mikä on Suomen pinta-ala maastokartalla, jonka mittakaava on $1 : 20\,000$?

RATKAISU

Karttakuvan pinta-alan A suhde todelliseen pinta-alaan on mittakaavan neliö.

$$\frac{A}{337\,000\ \text{km}^2} = \left(\frac{1}{20\,000}\right)^2$$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

$$A = 0{,}0008425\ \text{km}^2$$

Jotkin laskimet näyttävät kymmenpotenssimuodon $8{,}425 \cdot 10^{-4}$.

$$= 842{,}5\ \text{m}^2$$

Muutetaan neliömetreiksi siirtämällä pilkkua kuusi askelta, sillä $1\ \text{km}^2 = 1\,000\,000\ \text{m}^2$.

$$\approx 843\ \text{m}^2.$$

VASTAUS

$843\ \text{m}^2$

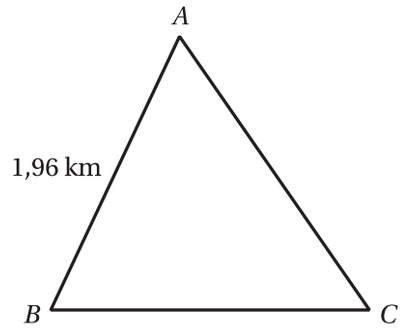
---

* Ennen ristiinkertomista poistetaan sulkeet: $\left(\frac{1}{50\,000}\right)^2 = \frac{1}{50\,000^2}$

** Pinta-alan yksiköt ja yksikkömuunnokset ovat kirjan lopussa sivulla 167.

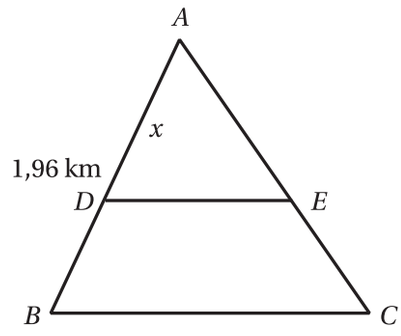
ESIMERKKI 5

Kolmion muotoisen metsäpalstan ABC pinta-ala on 212 hehtaaria. Perikunta haluaa erottaa palstasta sivun BC suuntaisella linjalla kolmion muotoisen alueen, jonka pinta-ala on 84 hehtaaria. Määritä linjan aloituspaikka sivulla AB, jonka pituus on 1,96 km.



RATKAISU

Olkoon x linjan aloituspaikan D etäisyys kärjestä A.



Koska janat DE ja BC ovat yhdensuuntaiset, kolmiot ABC ja ADE ovat yhdenmuotoiset. Kolmioiden yhdenmuotoisuussuhde on vastinosien AD ja AB pituuksien suhde $\frac{x}{1{,}96}$.

Kolmioiden pinta-alojen 84 (ha) ja 212 (ha) suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisuussuhteen neliö. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\frac{84}{212} = \left(\frac{x}{1{,}96}\right)^2$$

$x \approx -1{,}23$ tai $x \approx 1{,}23$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Negatiivinen juuri ei kelpaa ongelman ratkaisuksi. Aloituspaikan etäisyys kärjestä A on 1,23 km.

VASTAUS

1,23 km:n etäisyydellä kärjestä A

HARJOITUKSIA

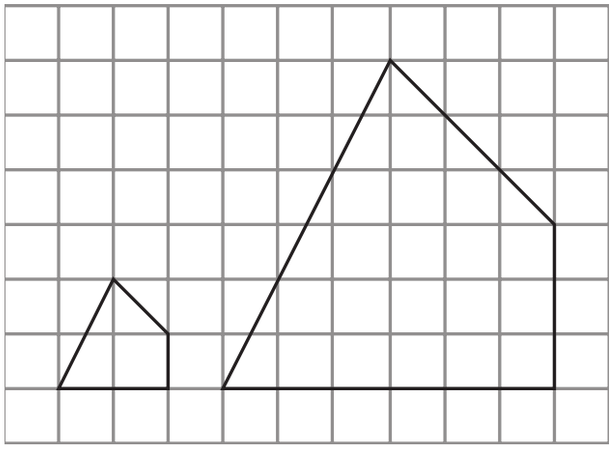
Sarja I

42. Kuinka moninkertaiseksi suorakulmion pinta-ala kasvaa, kun suorakulmion sivut

a) kolminkertaistuvat

b) kymmenkertaistuvat?

43. Nelikulmiot ovat yhdenmuotoiset. Mikä on pienemmän nelikulmion pinta-alan suhde suuremman nelikulmion pinta-alaan?



44. Rakennuksessa on kaksi yhdenmuotoista kaari-ikkunaa, joiden korkeudet ovat 1,43 m ja 2,18 m. Kuinka monta prosenttia pienemmän ikkunan pinta-ala on suuremman ikkunan pinta-alasta?

45. Käsineeseen, jonka kokonumero oli 8, tarvittiin 4,2 dm^2 nahkaa. Kuinka paljon nahkaa tarvitaan samanmalliseen käsineeseen, jonka numero on 10,5?
(Käsineen kokonumero on peukalon ja etusormen välistä mitattu kämmenen ympärysmitta tuumina.)

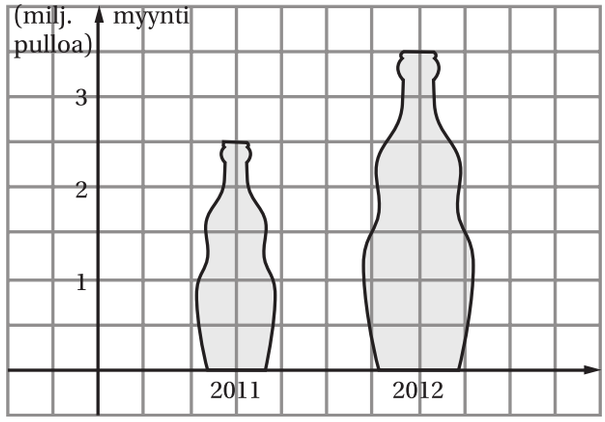
46. Suojelualueen pinta-ala kartalla, jonka mittakaava on 1 : 20 000, on 18,5 cm^2. Kuinka suuri suojelualueen pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina.

47. Mikropiirin pinta-ala on 2,4 mm^2. Mikä on mikropiirin pinta-ala työpiirustuksessa, jonka mittakaava on 50 : 1?

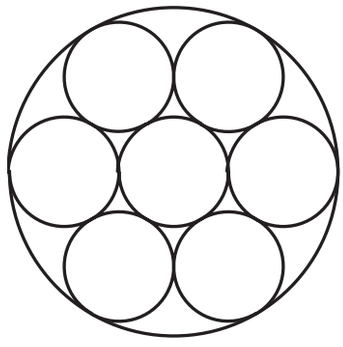
48. **a)** Kuinka monta prosenttia juoman myynti on lisääntynyt?

b) Vuoden 2012 diagrammia piirrettäessä kuvion kaikkia mittoja on kasvatettu samassa suhteessa. Katsojalle mielikuva kasvusta välittyy kuvioiden pinta-aloista. Kuinka monta prosenttia myynti näyttää kasvaneen? Onko tällainen havainnollistustapa rehellinen?

Uutuusjuoma Kupla kasvattaa myyntiään

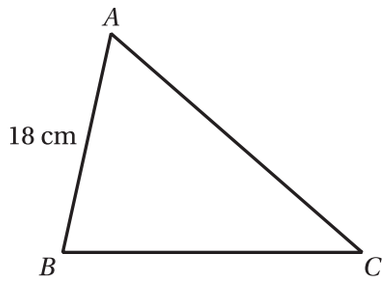


49. Mikä on pikkuympyröiden yhteenlasketun pinta-alan suhde ison ympyrän pinta-alaan? Anna vastaukseksi suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella. Huomaa, että ympyrän pinta-alan kaavaa ei tarvita.



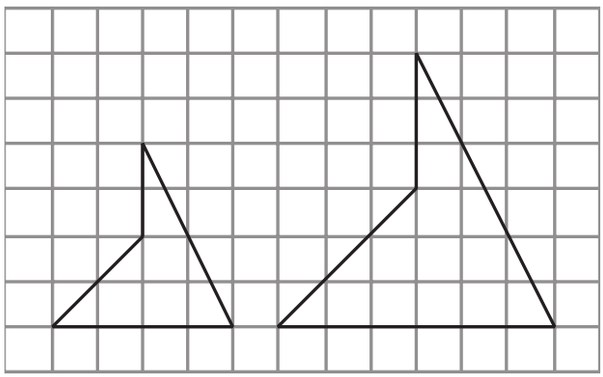
50. Kahden keskenään yhdenmuotoisen nelikulmion pinta-alat ovat $75\ \text{cm}^2$ ja $300\ \text{cm}^2$. Pienemmän nelikulmion erään sivun pituus on 25 cm. Kuinka pitkä on sivun vastinsivu suuremmassa nelikulmiossa?

51. Kolmion muotoisesta marjapiirakasta ABC leikataan pikkuveljelle kolmion muotoinen pala sivun BC suuntaisella viillolla. Piirakan pinta-ala on $240\ \text{cm}^2$ ja sivun AB pituus 18 cm.
a) Mikä pikkuveljen piirakkapalan pinta-ala on, jos viilto aloitetaan sivun AB keskikohdasta?
b) Mistä sivun AB kohdasta viilto tulisi aloittaa, jotta pikkuveli saisi puolet piirakasta?



Sarja II

52. Nelikulmiot ovat yhdenmuotoiset. Mikä on suuremman nelikulmion pinta-alan suhde pienemmän nelikulmion pinta-alaan?



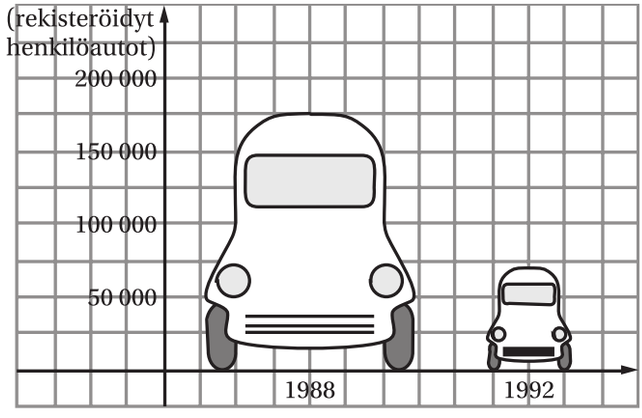
53. Kaikki Suomen liput ovat keskenään yhdenmuotoiset. Kahden lipun korkeudet ovat 1,45 m ja 2,35 m. Kuinka monta prosenttia pienemmän lipun pinta-ala on suuremman lipun pinta-alasta?

54. Kenkään, jonka kokonumero on 46, tarvitaan $5{,}7\ \text{dm}^2$ nahkaa. Kuinka paljon nahkaa tarvitaan samanmalliseen kenkään, jonka kokonumero on 40? Kengän kokonumero on jalan pituus senttimetreinä kerrottuna luvulla 1,5.

55. Tontin pinta-ala mittakaavassa 1 : 2 000 piirretyssä asemakaavakartassa on $4{,}7\ \text{cm}^2$. Mikä tontin pinta-ala on? Anna vastaus aareina.

56. Suomen pinta-ala on $337\,000\ \text{km}^2$. Mikä Suomen pinta-ala on maantiekartalla, jonka mittakaava on 1 : 200 000? Kuinka monta karttalehteä vähintään tarvitaan koko Suomen kartastoon, jos yhden karttalehden mitat ovat $1{,}00\ \text{m} \times 0{,}80\ \text{m}$?

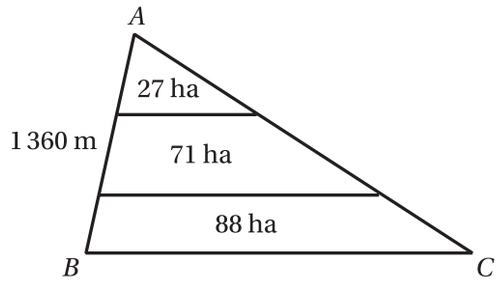
57. 1990-luvun alkupuolen lama näkyi voimakkaasti muun muassa uusien henkilöautojen myynnin vähenemisenä. Vieläkään (vuoteen 2012 mennessä) ei ole yhtenäkään vuonna saavutettu vuoden 1988 myyntilukuja.
a) Kuinka monta prosenttia uusien henkilöautojen lukumäärä vuonna 1992 oli vuoden 1988 lukumärästä?
b) Vuoden 1992 diagrammia piirrettäessä kuvion kaikkia mittoja on pienennetty samassa suhteessa. Kuinka monta prosenttia kuvion välittämän mielikuvan mukaan vuoden 1992 myynti näyttää olevan vuoden 1988 myynnistä?



58. Kahden kilpapyöräilijän pituudet ovat 168 cm ja 187 cm. Heidän kehojensa mittasuhteet ovat likimain samanlaiset. Kuinka monta prosenttia isomman pyöräilijän ilmanvastus on pienemmän pyöräilijän ilmanvastusta suurempi? Kappaleen ilmanvastus on suoraan verrannollinen kappaleen poikkileikkauksen pinta-alaan.

59. Kun laatoitetaan puutarhalehden ohjeiden mukainen 8,4 metriä leveä omituisen muotoinen patio, laatoitettavan alueen pinta-ala on 58 m^2. Kuinka leveä yhdenmuotoinen patio voidaan rakentaa, jos rahat riittävät vain 32 m^2:n laatoittamiseen?

60. Kolmion muotoisen metsäpalstan ABC pinta-ala on 186 hehtaaria. Palstan sivun AB pituus on 1 360 m. Perinnönjaossa palsta on jaettava kahdella sivun BC suuntaisella linjalla kolmeen osaan, joiden pinta-alat kärjestä A lukien ovat 27 ha, 71 ha ja 88 ha. Määritä linjojen aloituspaikkojen etäisyydet kärjestä A.



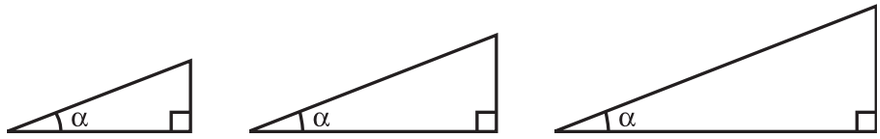
Kulman tangentti, sini ja kosini

ONGELMA

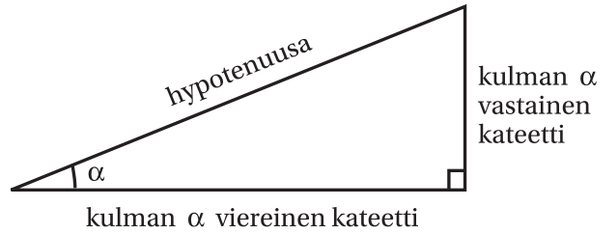
Kun aurinko paistoi 35°:n korkeudella*, puusta lankesi tasaiselle vaakasuoralle pihalle varjo, joka ulottui 30 metrin päähän puusta. Piirrä mallikolmio, jossa 35°:n kulma on oikean kokoinen ja varjoa vastaavan sivun pituus on 10 cm. Mittaa puuta vastaavan sivun pituus ja laske puun pituus.

* Kulmaa, jonka suunta kohti aurinkoa muodostaa maanpinnan vaakatason kanssa, sanotaan auringon korkeuskulmaksi.

Kaikki suorakulmaiset kolmiot, joissa on yhtä suuri terävä kulma α, ovat keskenään yhdenmuotoiset.



Siten kaikissa suorakulmaisissa kolmioissa, joissa on yhtä suuri terävä kulma α, vastaavissa asemissa olevien sivujen suhteet ovat yhtä suuret. Esimerkiksi kaikissa suorakulmaisissa kolmioissa, joissa on yhtä suuri terävä kulma α, on kulman α viereisen kateetin pituuden suhde hypotenuusan pituuteen yhtä suuri.



Jokaisella mahdollisella suorakulmaisen kolmion sivujen suhteella on latinalaisperäinen nimensä. Yleisimmin käytetään seuraavaa kolmea suhdetta.*

Terävän kulman tangentti, sini ja kosini

Suorakulmaisessa kolmiossa, jossa on terävä kulma α,

- suhde $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}$ on kulman α *tangentti*,
- suhde $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ vastaisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$ on kulman α *sini*,
- suhde $\dfrac{\text{kulman } \alpha \text{ viereisen kateetin pituus}}{\text{hypotenuusan pituus}}$ on kulman α *kosini*.

* Seuraavassa nimetyn tangentin, sinin ja kosinin lisäksi kulman α viereisen kateetin suhde vastaiseen kateettiin on kulman α *kotangentti*, hypotenuusan suhde viereiseen kateettiin on kulman α *sekantti* ja hypotenuusan suhde vastaiseen kateettiin on kulman α *kosekantti*. Monien maiden kouluissa (esimerkiksi Yhdysvalloissa) opiskellaan nämä kaikki.

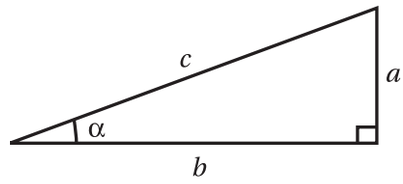
Kulman α tangenttia, siniä ja kosinia merkitään $\tan\alpha$, $\sin\alpha$ ja $\cos\alpha$.

Viereisessä kolmiossa

$\tan\alpha = \frac{a}{b}$,

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$,

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$.



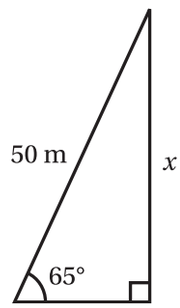
Kulman α suuruudesta riippuvia suhteita $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ja $\tan\alpha$ sanotaan *trigonometrisiksi funktioiksi*.*

ESIMERKKI 1

Suoraksi kiristynyt 50 metriä pitkä leijan lanka muodostaa maanpinnan kanssa 65°:n kulman. Kuinka korkealla leija lentää?

RATKAISU

Piirretään mallikuvio.** Kuviossa x on leijan lentokorkeus.



Pituus x on 65°:n kulman vastaisen kateetin pituus. Pituus 50 (m) on kolmion hypotenuusan pituus.

Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$\sin 65° = \frac{x}{50}$ — Suorakulmaisen kolmion terävän kulman sini on vastaisen kateetin suhde hypotenuusaan.

$x \approx 45$ (m) — Ratkaisu symbolisella laskimella.***

* Kreikasta juontuva sana trigonometria tarkoittaa kolmionmittausta: *tri* = kolme, *gonia* = kulma ja *metron* = mitta.

** Mallikuvioon kannattaa piirtää tunnettu terävä kulma likimain oikean kokoisena, jolloin kuviota voidaan käyttää ratkaisun likimääräiseen tarkistamiseen. Jos tunnettu kulma on pieni, se joudutaan kuitenkin piirtämään todellista suurempana.

*** Laskimessa tulee olla kulman yksikön asetuksena aste (Degree).

Voidaan myös ratkaista:

$$\sin 65° = \frac{x}{50} \qquad | \cdot 50$$

$$x = 50 \cdot \sin 65° \approx 45 \text{ (m)}.$$

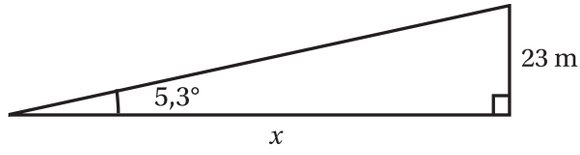
VASTAUS 45 metrin korkeudella

ESIMERKKI 2

Majakan huippu näkyy soutuveneestä $5{,}3°$ vedenpinnan yläpuolella. Merikortin mukaan majakan korkeus vedenpinnasta mitattuna on 23 m. Mikä on soutuveneen etäisyys majakasta?

RATKAISU

Piirretään mallikuva. Kuviossa x on soutuveneen etäisyys majakasta.



Pituudet x ja 23 (m) ovat kolmion kateettien pituudet. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$\tan 5{,}3° = \frac{23}{x}$$

Suorakulmaisen kolmion terävän kulman tangentti on vastaisen kateetin suhde viereiseen kateettiin.

$$x \approx 250 \text{ (m)}$$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$$\tan 5{,}3° = \frac{23}{x} \qquad | \cdot x$$

$$x \cdot \tan 5{,}3° = 23 \qquad | : \tan 5{,}3°$$

$$x = \frac{23}{\tan 5{,}3°} \approx 250 \text{ (m)}.$$

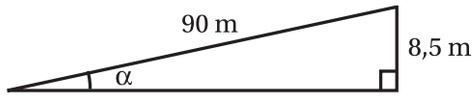
VASTAUS 250 m

ESIMERKKI 3

Eräs Suomen maanteiden jyrkimmistä nousuista on Turussa Kaskenmäessä, jossa 90 metrin matkalla noustaan 8,5 metriä. Mikä mäen kaltevuuskulma on?

RATKAISU

Rinteen kaltevuuskulma on rinteen ja maanpinnan vaakatason välinen kulma α.



Pituus 8,5 m on kulman α vastaisen kateetin pituus. Pituus 90 m on kolmion hypotenuusan pituus.

$$\sin\alpha = \frac{8{,}5}{90}$$

Kulman sini on vastaisen kateetin pituuden suhde hypotenuusan pituuteen.

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{8{,}5}{90}\right)$$

Laskimen funktio $\sin^{-1}$ ilmaisee kulman suuruuden, kun tunnetaan kulman sini.

$$\alpha \approx 5{,}4°$$

VASTAUS

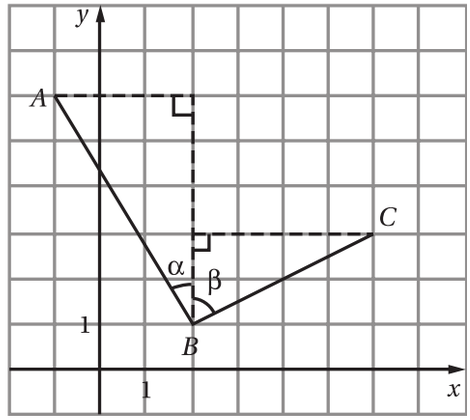
5,4°

ESIMERKKI 4

Koordinaatistoon on merkitty pisteet $A=(-1, 6)$, $B=(2, 1)$ ja $C=(6, 3)$. Laske kulman ABC suuruus asteen tarkkuudella.

RATKAISU

Täydennetään kuvioon kaksi suorakulmaista kolmiota koordinaattiakselien suuntaisilla janoilla. Kulma ABC on kuvion kulmien α ja β summa.



Ratkaistaan kulmat α ja β. Kolmioiden kateettien pituudet saadaan selville laskemalla ruutuja.

$$\tan\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 30{,}96°$$

Välitulokset lasketaan tarkempina kuin lopputulos.

$$\tan\beta = \frac{4}{2}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \approx 63{,}43°$$

Siis

$$\sphericalangle ABC = \alpha + \beta \approx 30{,}96° + 63{,}43° = 94{,}39° \approx 94°.$$

VASTAUS

94°

HARJOITUKSIA

Sarja I

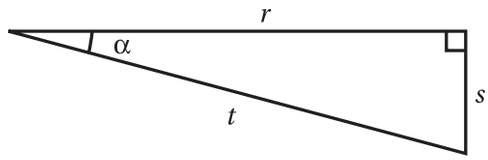
61. Kolmioissa sivujen pituuksia on merkitty kirjaimilla. Ilmaise kirjaimien avulla

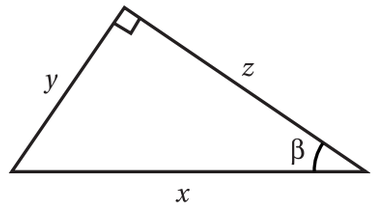
a) $\tan\alpha =$

b) $\sin\alpha =$

c) $\cos\beta =$

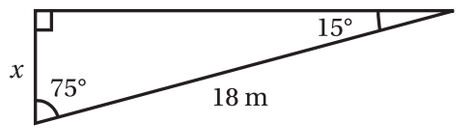
d) $\tan\beta =$



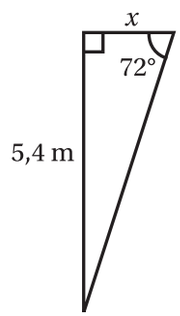


62. Laske suorakulmaisen kolmion sivun pituus x.

a)



b)



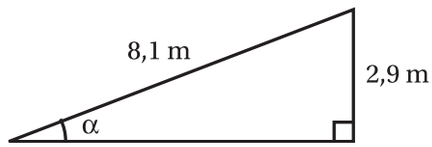
63. Kun aurinko paistaa 47°:n korkeudella, puusta lankeaa vaakasuoralle kentälle 13 metrin pituinen varjo. Kuinka pitkä puu on? Auringon korkeuskulma on kulma, jonka suunta kohti aurinkoa muodostaa maanpinnan vaakatason kanssa.

64. Lentokone näkyy lennonjohtotornista 25°:n korkeudella vaakatason yläpuolella. Tutkan mukaan koneen etäisyys tornista on 12 km. Kuinka korkealla lentokone lentää?

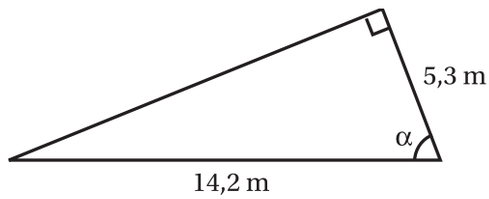
65. Laskettelurinteen kaltevuuskulma on 35° ja lähdön ja maalin korkeusero 270 m. Kuinka pitkä suora lasku nopeuslaskijalla on rinteessä?

66. Kuinka suuri kulma α on?

a)



b)



67. Traktorin lavalle 1,3 metrin korkeudelle kärrätään multaa 3,7 metrin pituista lankkua pitkin. Kuinka suuri lankun kaltevuuskulma on?

68. Laske kulman ABC suuruus asteen tarkkuudella, kun $A = (4, 5)$, $B = (0, 2)$ ja
a) $C = (3, 0)$ **b)** $C = (3, 3)$.

69. Tasaisesti viettävän rannan kaltevuuskulma on 2,2°. Kuinka paljon vesiraja etääntyy laskuveden aikana, jos nousu- ja laskuveden välinen vedenpinnan korkeusero on 4,8 metriä?

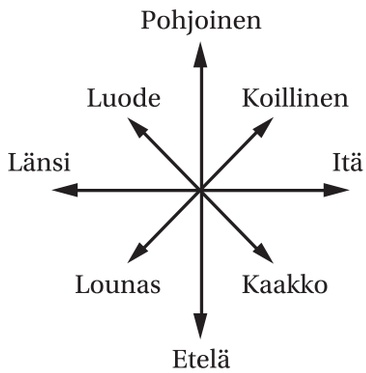
70. Täsmälleen joen vastarannalla pantiin merkille selvästi erottuva kiintopiste. Kun siirryttiin joen suoraa rantaviivaa seuraten 35 metriä sivuun, kiintopiste näkyi suunnassa, joka muodosti 76°:n kulman rantaviivan kanssa. Kuinka leveä joki on?

71. Merenkulussa ja lentoliikenteessä kompassisuunnat ilmaistaan asteina pohjoissuunnasta myötäpäivään lukien. Esimerkiksi suunta kohti itää on $90°$ ja suunta kohti etelää on $180°$. Mihin kompassisuuntaan kuljetaan, kun kuljetaan

a) kaakkoon

b) länteen?

c) Paikasta A purjehdittiin paikkaan B niin, että ensin purjehdittiin $12{,}3$ kilometriä itään ja sitten $17{,}8$ kilometriä etelään. Mihin kompassisuuntaan purjehtimalla olisi päästy suoraan paikasta A paikkaan B?



72. Majakka näkyi suoraan itään kulkevasta laivasta etelässä. Laivan edettyä $6{,}6$ kilometriä majakka näkyi kompassisuunnassa $214°$. Kuinka etäällä laiva nyt oli majakasta?

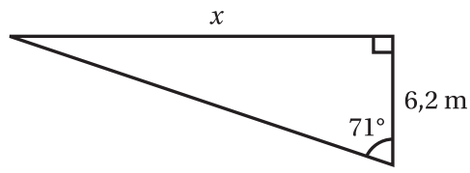
73. Yläkerran ikkunasta $5{,}5$ metrin korkeudesta näkyy tasaisella pihalla kasvavan puun tyvi $12°$ silmäntason alapuolella ja latva $23°$ silmäntason yläpuolella. Kuinka pitkä puu on?

74. Puu kasvaa pohjoiseen viettävällä rinteellä, jonka kaltevuuskulma on $14°$. Kun aurinko paistoi suoraan etelässä $46°$:n korkeudella, puusta lankesi alarinteeseen 32 metrin pituinen varjo. Kuinka pitkä puu on?

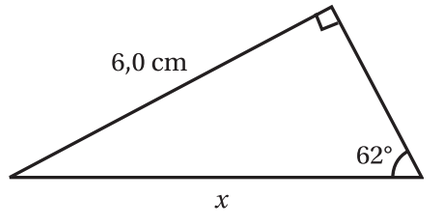
Sarja II

75. Laske kolmion sivun pituus x.

a)



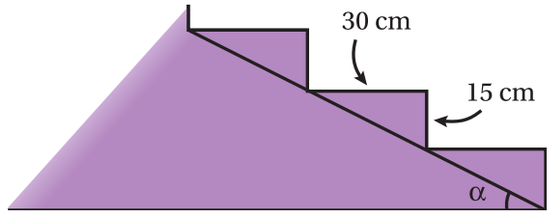
b)



76. Pylvään huipusta pingotetun tukivaijerin kiinnityskohta on maassa $6{,}4$ metrin päässä pylväästä. Vaijerin ja maanpinnan välinen kulma on $68°$. Kuinka pitkä pylväs on?

77. Suorakulmaisen kolmion toisen terävän kulman suuruus on $38°$ ja pitemmän kateetin pituus $4{,}9$ cm. Kuinka pitkä kolmion hypotenuusa on?

78. Laske portaiden kaltevuuskulma α.



79. Espanjan ympäriajon reitillä jyrkimmän nousun pituus oli $4{,}2$ km ja nousun alun ja lopun korkeusero 580 m. Mikä nousun kaltevuuskulma oli?

80. Pisan kaupungissa Italiassa on kuuluisa vuosina 1174–1350 rakennettu torni, joka perustusten vajoamisen takia on kallistunut. Tornin reunalta 55 metrin korkeudelta pudotettu kivi kohtaa maan $4{,}5$ metrin etäisyydellä tornin juuresta. Kuinka monta astetta torni on kallistunut?

81. Laske kolmion ABC kulmien suuruudet asteen tarkkuudella, kun $A = (1, -2)$, $B = (3, 3)$ ja $C = (2, 5)$.

82. Nosturiauton nosturilla, jonka pituus on 45 metriä, nostetaan raskainta sallittua taakkaa. Jotta nosturi ei keikahtaisi, kulman, jonka nosturi muodostaa maanpinnan kanssa, tulee olla vähintään $60°$. Kuinka etäällä oleva taakka nosturilla voidaan nostaa?

83. Luodolla olevasta majakasta 51 metrin korkeudelta vedenpinnasta näkyy suoraan etelässä hylje ja vene, hylje $12°$ ja vene $4{,}5°$ vaakatason alapuolella. Kuinka etäällä hylje on veneestä?

84. Kirjahyllyn 2,80 metrin korkuinen tukikehikko osoittautui liian korkeaksi. Pystyyn nostettuna se jäi asentoon, joka poikkesi pystysuorasta asennosta $12°$. Kuinka paljon kehikkoa tulee lyhentää?

85. Paikasta A purjehdittiin paikkaan B purjehtimalla ensin 3,5 kilometriä etelään, sitten 8,0 kilometriä itään ja vielä 8,5 kilometriä etelään. Paluumatka halutaan purjehtia suoraan. Laske kompassisuunta paikasta B paikkaan A. Kompassisuunta ilmaistaan asteina pohjoissuunnasta myötäpäivään lukien (katso tehtävä 71).

86. Vuoren huippu näkyi laivasta suoraan lounaassa $15{,}2°$:n korkeudella. Kun laiva oli purjehtinut 4,00 km länteen, huippu näkyi suoraan etelässä. Kuinka korkea vuori on?

87. Puu kasvaa etelään viettävällä rinteellä, jonka kaltevuuskulma on $12°$. Kun aurinko paistoi suoraan etelässä $32°$:n korkeudella, puusta lankesi ylärinteeseen 16 metrin pituinen varjo. Kuinka pitkä puu on?

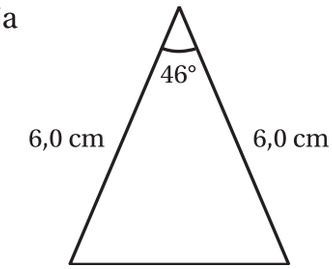
Trigonometrian käyttöä

ESIMERKKI 1

Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 6,0 cm ja huippukulman suuruus 46°. Laske kolmion

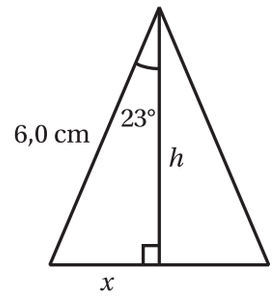
a) kannan pituus

b) pinta-ala.



RATKAISU

a) Piirretään kolmion huipusta kolmion korkeusjana. Korkeusjana jakaa tasakylkisen kolmion kannan kahteen yhtä pitkään osaan ja puolittaa huippukulman.



Ratkaistaan muodostuneesta suorakulmaisesta kolmiosta kannan puolikas x.

$$\sin 23° = \frac{x}{6{,}0}$$

$$x \approx 2{,}344 \text{ (cm)}$$

Kannan pituus on

$$2x \approx 2 \cdot 2{,}344 \text{ cm} = 4{,}688 \text{ cm} \approx 4{,}7 \text{ cm}.$$

b) Pinta-alan laskemiseksi ratkaistaan kannalle piirretty korkeus h.

$$\cos 23° = \frac{h}{6{,}0}$$

$$h \approx 5{,}523 \text{ (cm)}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4{,}688 \cdot 5{,}523$$

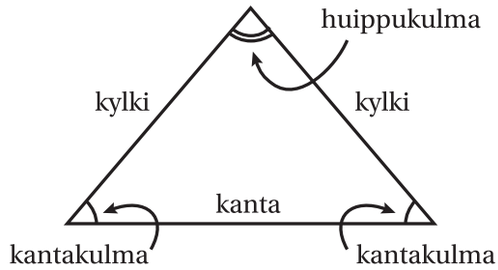
$$\approx 13 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Puolet kannan pituuden ja korkeuden tulosta.*

VASTAUS **a)** 4,7 cm **b)** 13 cm^2

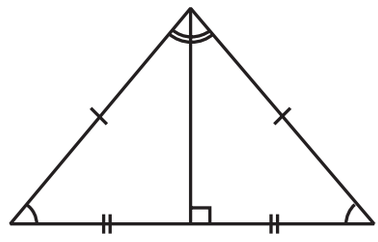
Tasakylkinen kolmio

Kolmio, jossa on kaksi yhtä pitkää sivua, on *tasakylkinen kolmio*. Tasakylkisen kolmion keskenään yhtä pitkiä sivuja kutsutaan kolmion *kyljiksi*. Kolmion kolmas sivu on *kanta*. Kylkien välinen kulma on tasakylkisen kolmion *huippukulma* ja kaksi muuta kulmaa ovat *kantakulmia*.



Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret.

Tasakylkisen kolmion huipusta kannalle piirretty korkeusjana puolittaa kannan ja huippukulman ja jakaa siis kolmion kahteen yhtenevään (samanlaiseen) suorakulmaiseen kolmioon.



* Kolmion pinta-ala on puolet kannan ja korkeuden tulosta eli $A = \frac{ah}{2}$.
Kaava voidaan ilmaista myös muodossa $A = \frac{1}{2}ah$.
Jotta vältetään välitulosten pyöristyksistä mahdollisesti aiheutuva virheellinen lopputulos, välitulosten likiarvot on laskettu useamman numeron tarkkuudella, kuin mikä on tavoiteltu lopputuloksen tarkkuus (tässä tapauksessa kahden numeron tarkkuus).

ESIMERKKI 2

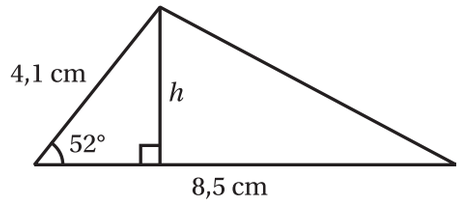
Kolmion kahden sivun pituudet ovat 8,5 cm ja 4,1 cm. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on, jos sivujen välisen kulman suuruus on

a) 52° **b)** 123°?

RATKAISU

a) Kolmion pinta-ala on puolet yhden sivun (kannan) ja sille tai sen jatkeelle piirretyn korkeusjanan pituuden (korkeuden) tulosta.

Kannaksi on valittu sivu, jonka pituus on 8,5 cm. Lasketaan tälle sivulle piirretyn korkeusjanan pituus h.



$$\sin 52° = \frac{h}{4{,}1}$$

$$h \approx 3{,}231 \text{ (cm)}$$

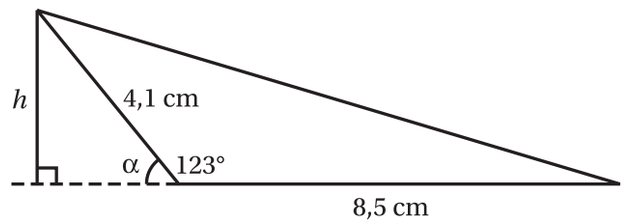
Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ah$$

Sijoitetaan $a = 8{,}5$ ja $h \approx 3{,}231$.

$$= \frac{1}{2} \cdot 8{,}5 \cdot 3{,}231 \approx 14 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Kannaksi on valittu sivu, jonka pituus on 8,5 cm. Lasketaan sivun jatkeelle piirretyn korkeusjanan pituus h.



$$\alpha = 180° - 123° = 57°$$

Kulma α on 123°:n kulman vieruskulma.

$$\sin 57° = \frac{h}{4{,}1}$$

$$h \approx 3{,}439 \text{ (cm)}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \cdot 8{,}5 \cdot 3{,}439 \approx 15 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

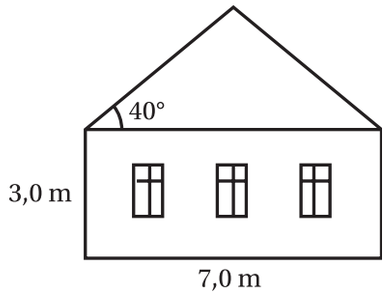
VASTAUS

a) 14 cm^2 **b)** 15 cm^2

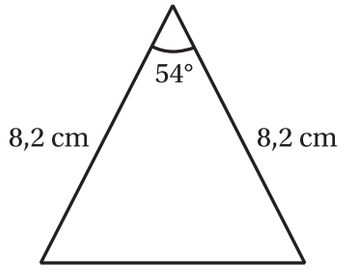
HARJOITUKSIA

Sarja I

88. Rakennus on katettu symmetrisellä harjakatolla. Kuinka korkea rakennus on?



89. Laske tasakylkisen kolmion
a) kantakulmien suuruus
b) kannan pituus
c) pinta-ala.



90. Tasakylkisen kolmion kannan pituus on 6,82 cm ja kantakulmien suuruus 50,2°. Määritä kolmion piiri.

91. Kolmion kahden sivun pituudet ovat 6,2 cm ja 9,5 cm. Sivujen välisen kulman suuruus on 35°. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

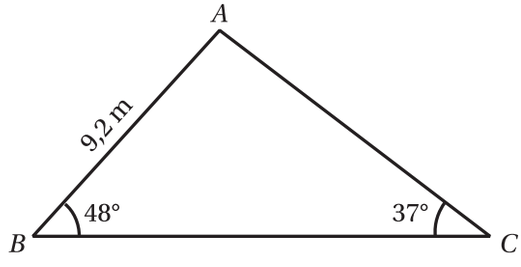
92. Kolmion muotoisen hakkuualueen kahden sivun pituudet ovat 630 metriä ja 590 metriä. Sivujen välisen kulman suuruus on 110°. Kuinka suuri hakkuualueen pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina.

93. Kiikarin näkökulman suuruus on 9,8°. Millä etäisyydellä on poikkisuuntaan kulkeva 180 metriä pitkä laiva, jonka pituus ohitushetkellä laivan ollessa lähinnä katsojaa juuri täyttää kiikarin näkökentän?

94. Jalkapallomaalin leveys on 7,32 metriä (8 jaardia). Kuinka suuressa kulmassa tolppien väli näkyy ns. pilkulta (rangaistuspotkun suorituspaikalta) 11,0 metrin etäisyydeltä maalista?

95. Rinne viettää tasaisesti 16°:n kulmassa. Myrsky taittaa rinteessä kasvavan 18,6 metrin pituisen puun rungon keskikohdasta, ja latvaosa kaatuu suoraan ylärinteeseen irtoamatta tyviosasta. Kuinka kaukana puun tyvestä latva osuu maahan?

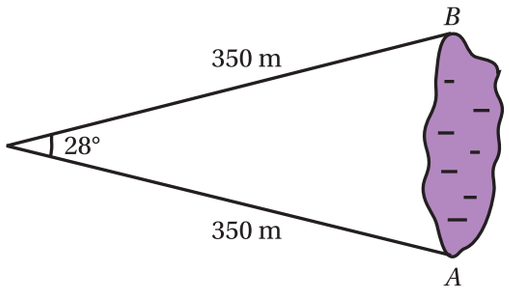
96. Laske kolmion ABC sivun AC pituus.



97. Eräällä hetkellä majakka näkyi laivasta suoraan pohjoisessa. Kun laiva oli kulkenut 27 kilometriä kompassisuuntaan 23°, majakka näkyi luoteessa. Kuinka etäällä laiva nyt oli majakasta? Kompassisuunta ilmaistaan asteina pohjois-suunnasta myötäpäivään lukien.

Sarja II

98. Laske lammen pituus AB.



99. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 12 m ja huippukulman suuruus 110°. Laske kolmion pinta-ala.

100. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 8,3 cm ja kannan pituus 6,2 cm. Kuinka suuret kolmion kulmat ovat?

101. Kolmion kaksi sivua ovat 8,0 cm ja 11,2 cm. Sivujen välisen kulman suurus on 82°. Laske kolmion pinta-ala.

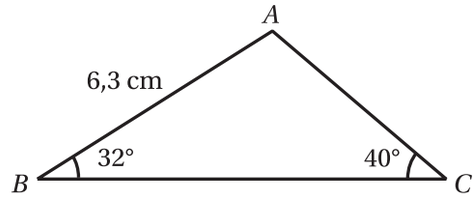
102. Rauhoitetuksi metsäalueeksi rajattiin kiintopisteiden A, B ja C määräämä kolmio. Kolmion kulman B suuruus on 145°, sivun AB pituus 6,3 km ja sivun BC pituus 13,1 km. Kuinka suuri metsäalueen pinta-ala on?

103. Valokuvaaja haluaa kuvata 180 senttimetrin levyisen taulun. Kuinka etäällä taulusta hänen tulee vähintään seistä, jos hän käyttää
a) laajakulmaobjektiivia, jonka näkökulma on 64°
b) normaaliobjektiivia, jonka näkökulma on puolet edellisestä eli 32°?

104. Amerikkalaisen jalkapallon maalitolppien väli on 7,1 m (23 jalkaa 4 tuumaa). Kummasta paikasta kentällä on helpompi osua maaliin: maalin keskikohdan kohdalta 9,0 metrin päästä maalista vai maalitolpan kohdalta 8,0 metrin päästä maalista?

105. Jyrkkään 15°:n kulmassa viettävään rinteeseen pystytetty sähköpylväs ja sen huipusta ylärinteeseen vedetty tukivaijeri ovat yhtä pitkät. Vaijerin kiinnityskohta maassa on 6,1 metrin päässä pylväästä. Kuinka korkea pylväs on?

106. Laske kolmion ABC
a) sivun BC pituus
b) pinta-ala.

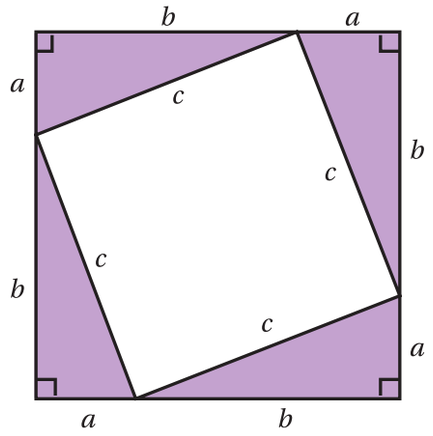


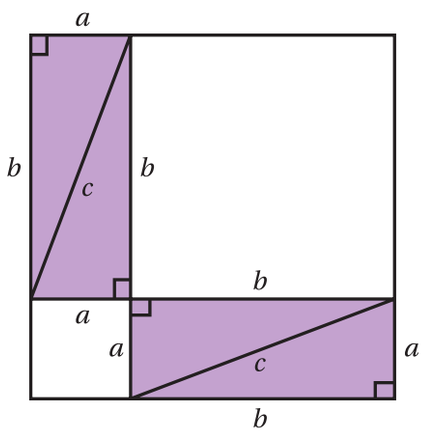
107. Majakan ja laivan valot näkyvät luotsiasemalle suunnissa, joiden välinen kulma on 22°. Laivasta ilmoitetaan, että suunnat kohti luotsiasemaa ja majakkaa muodostavat 41°:n kulman. Majakan etäisyys luotsiasemasta on 12,6 km. Kuinka kaukana laiva on majakasta?

6 Pythagoraan lause

ONGELMA

Neljä samanlaista suorakulmaista kolmiota, joiden kateetit ovat a ja b ja hypotenuusa c, on sijoitettu kahdella eri tavalla neliöön, jonka sivun pituus on kolmioiden kateettien summa $a + b$.





Vertaa kuvioiden peittämättä jääneiden (valkoisten) alueiden pinta-aloja ja perustele Pythagoraan lause, jonka mukaan suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien neliöiden summa on hypotenuusan pituuden neliö.

Pythagoraan lause

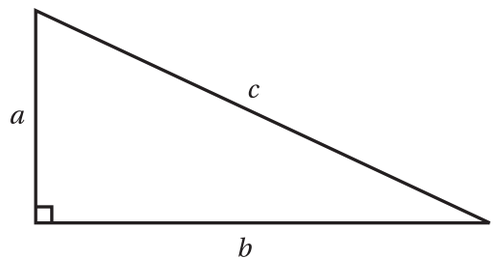
Suorakulmaisen kolmion kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö.

Kuvion kolmiossa, jossa kateetit ovat a ja b hypotenuusa on c, on

$a^2 + b^2 = c^2$

eli

$c^2 = a^2 + b^2$.



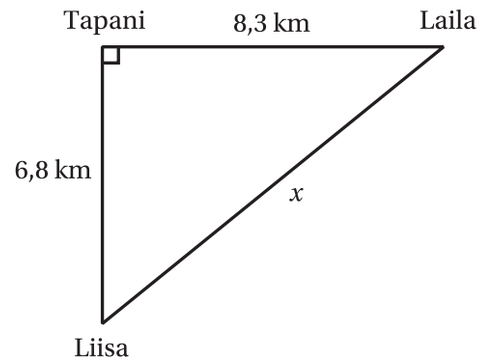
Pythagoraan lauseelle on esitetty lukuisia todistuksia, erään arvion mukaan 370 erilaista. Yksi todistus on edellä ongelmana.

ESIMERKKI 1

Lailan koti on 8,3 kilometriä itään ja Liisan koti 6,8 kilometriä etelään Tapanin kodista. Kuinka pitkä matka on Lailan kodista Liisan kotiin?

RATKAISU

Kolmio, jonka kärjissä kodit ovat, on suorakulmainen. Kysytty etäisyys on kolmion hypotenuusan pituus x (km). Kateettien pituudet ovat 8,3 km ja 6,8 km.



Hypotenuusan pituuden neliö on yhtä suuri kuin kateettien pituuksien neliöiden summa. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$x^2 = 6{,}8^2 + 8{,}3^2$

Yhtälö voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.

$x^2 = 115{,}13$

Yhtälön juuret ovat luvun 115,13 neliöjuuri ja neliöjuuren vastaluku.

$x = \sqrt{115{,}13} \approx 10{,}7$ tai $x = -\sqrt{115{,}13} \approx -10{,}7$

Vain positiivinen juuri voi olla hypotenuusan pituus. Matka Lailan kodista Liisan kotiin on 10,7 km.

VASTAUS

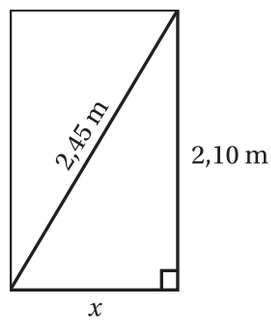
10,7 km

ESIMERKKI 2

Kuinka leveä pitäisi 2,10 metriä korkean oven olla, jotta 4,26 metriä pitkä ja 2,45 metriä leveä lasilevy mahtuisi ovesta?

RATKAISU

Kapeimman mahdollisen oviaukon lävistäjä on levyn lyhyemmän sivun pituinen.
Lävistäjä jakaa suorakulmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



Kateettien pituudet ovat x (m) ja 2,10 m.
Hypotenuusan pituus on 2,45 m.

Kateettien pituuksien neliöiden summa on hypotenuusan pituuden neliö. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$x^2 + 2{,}1^2 = 2{,}45^2 \qquad | - 2{,}1^2$

Yhtälö voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.

$x^2 = 2{,}45^2 - 2{,}1^2$

$x^2 = 1{,}5925$

$x = \sqrt{1{,}5925} \approx 1{,}26 \text{ tai } x = -\sqrt{1{,}5925} \approx -1{,}26$

Ongelman ratkaisuksi kelpaa vain positiivinen juuri. Oven leveyden tulee olla yli 1,26 m.

VASTAUS

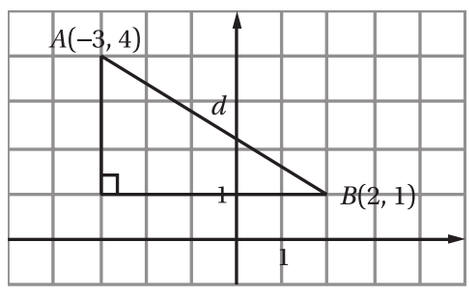
yli 1,26 m leveä

ESIMERKKI 3

Laske koordinaatiston pisteiden $A(-3, 4)$ ja $B(2, 1)$ välinen etäisyys.

RATKAISU

Piirretään jana AB ja täydennetään kuvio suorakulmaiseksi kolmioksi koordinaattiakselien suuntaisilla janoilla.



Jana AB on kolmion hypotenuusa. Kateettien pituudet saadaan selville laskemalla ruutuja: x-akselin suuntaisen kateetin pituus on 5, ja y-akselin suuntaisen kateetin pituus on 3.

Lasketaan janan AB pituus d.

$d^2 = 5^2 + 3^2$

Hypotenuusan neliö on kateettien neliöiden summa.

$d = -\sqrt{34} \approx -5{,}8 \text{ tai } d = \sqrt{34} \approx 5{,}8$

Tarkka etäisyys on $\sqrt{34}$. Likiarvo lasketaan havainnollistukseksi ja tarkistukseksi.

VASTAUS

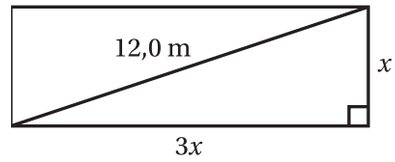
$\sqrt{34} \approx 5{,}8$

ESIMERKKI 4

Suorakulmion pitempi sivu on kolme kertaa niin pitkä kuin lyhyempi sivu. Suorakulmion lävistäjän pituus on 12,0 m. Kuinka pitkät suorakulmion sivut ovat?

RATKAISU

Merkitään suorakulmion lyhyemmän sivun pituutta x, jolloin pitemmän sivun pituus on $3x$. Pituudet x ja $3x$ ovat kateettien pituudet suorakulmaisessa kolmiossa, jonka hypotenuusan pituus on 12,0 (m).



Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$(3x)^2 + x^2 = 12{,}0^2$

$x \approx -3{,}795$ tai $x \approx 3{,}795$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Lyhyempi sivu on $x \approx 3{,}795 \approx 3{,}8$ (m), ja pitempi sivu on $3x \approx 3 \cdot 3{,}795 \approx 11{,}4$ (m).

VASTAUS

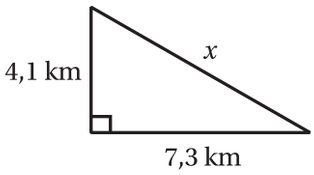
3,8 m ja 11,4 m

HARJOITUKSIA

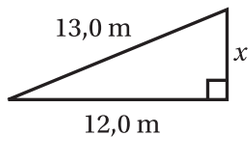
Sarja I

108. Laske suorakulmaisen kolmion tuntemattoman sivun pituus.

a)



b)



109. Suorakulmion leveys on 3,0 m ja pituus 5,0 m. Kuinka pitkä suorakulmion lävistäjä on?

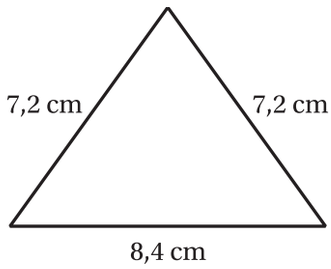
110. Liisan huoneen ikkunan alareuna on 3,6 metrin korkeudella. Seinän edessä on 2,3 metriä leveä istutus, johon ei saa jättää jälkiä. Kuinka pitkät tikapuut tarvitaan huoneeseen kiipeämiseen?

111. Kuinka korkea pitäisi kellarin 96 senttimetriä leveän ikkunan olla, jotta 120 senttimetrin levyinen ja 270 senttimetrin pituinen ohut rakennuslevy mahtuisi ikkunasta sisään?

112. Laske tasakylkisen kolmion

a) huipusta kannalle piirretyn korkeusjanan pituus

b) pinta-ala.



113. Laske pisteiden A ja B välinen etäisyys, kun

a) $A = (-1, 3)$ ja $B = (2, 5)$

b) $A = (2, -3)$ ja $B = (-6, 12)$.

114. Suorakulmion muotoisen kentän pitemmän sivun pituuden suhde lyhyemmän sivun pituuteen on 3 : 2. Lävistäjää pitkin kulkevan polun pituus on 52 metriä. Kuinka pitkät kentän sivut ovat?

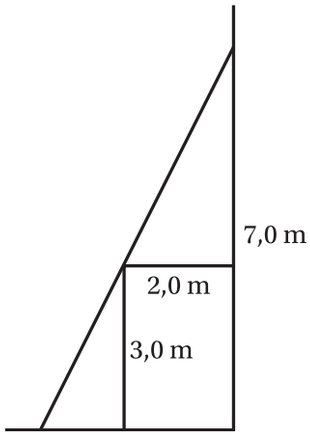
115. Tasamaalle pystytettyjen antennimastojen korkeudet ovat 65 metriä ja 47 metriä. Antennien etäisyys on 25 metriä. Mikä antennien huippujen välinen etäisyys on?

116. Ilman lämmetessä lämpölaajeneminen pidentää ratakiskoa. Ennen kiskojen väliin jätettiin laajenemisvarat, jotka aiheuttivat junan kulkiessa kuuluvan kiskojen kolkkeen. Nykyisin kiskot hitsataan kiinni toisiinsa ja kiinnitetään tukevammin ratapölkkyihin.
Oletetaan, että lämpölaajeneminen pidentää 60,0 metrin mittaista kahdesta yhtä pitkästä pätkästä muodostuva kisko-osuutta 2,0 cm ja että tällöin keskellä olevat kiinnikkeet irtoavat ja hitsaussauma antaa periksi. Kuinka korkealle keskikohta nousee?

117. Rima, jonka pituus on 1,50 m, katkaistaan suorakulmaisen kolmion kateeteiksi. Hypotenuusan pituudeksi halutaan 1,10 m. Kuinka pitkiin osiin rima on katkaistava?

118. Aamupäivällä oli taivallettu länteen ja iltapäivällä 3,0 kilometriä pitempi matka pohjoiseen. Leiriydyttäessä oli päädytty 12,5 kilometrin etäisyydelle lähtöpaikasta. Kuinka pitkä matka päivän aikana oli taivallettu?

119. Tikkaat nojaavat sekä seinään että seinää vasten rakennettuun katokseen, ja tikkaiden yläpää on seinällä 7,0 metrin korkeudella. Kuinka pitkät tikkaat ovat?



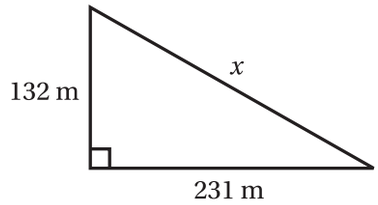
120. Rinne viettää tasaisesti 12°:n kulmassa. Myrsky taittoi rinteessä kasvavan puun 5,0 metrin korkeudelta ja latvaosa kaatui suoraan alarinteeseen irtoamatta tyviosasta. Latva osui maahan 8,0 metrin päässä tyvestä. Laske puun korkeus.
(Ohje: Täydennä kuvioon latvasta rungon jatkeelle piirretty kohtisuora.)

121. Edellisen tehtävän rinteessä kasvanut toinen puu taittui seuraavassa myrskyssä. Sekin taittui 5,0 metrin korkeudelta ja latva osui maahan 8,0 metrin päässä tyvestä, tällä kertaa ylärinteessä. Kuinka korkea tämä puu oli?

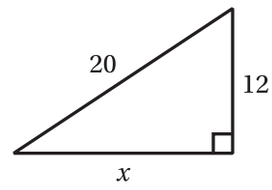
Sarja II

122. Laske suorakulmaisen kolmion tuntemattoman sivun pituus.

a)



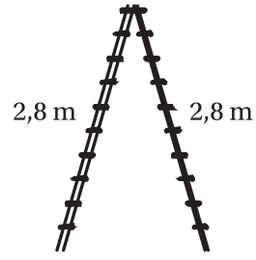
b)



123. Kun 5,5 metrin pituiset tikapuut asetettiin puun runkoa vasten niin, että ne juuri ylettyivät alimpiin oksiin, tikkaiden alapää oli 2,5 metrin päässä rungosta. Kuinka korkealla puun alimmat oksat ovat?

124. Aarrekartan ohjeissa käsketään kulkea 120 askelta pohjoiseen, 50 askelta länteen ja 30 askelta etelään. Kuinka kauas lähtöpaikasta näin joutuu?

125. Tikkaiden jalkojen etäisyys saa pienimmillään olla 1,5 metriä. Kuinka korkealle tikkaat silloin yltävät?



126. Kun lattialistaa sovitettiin paikalleen, se osoittautui liian pitkäksi. Kun listan toinen pää oli lattianurkassa, toinen pää jäi vastapäiselle seinälle 75 senttimetrin päähän lattianurkasta. Listan pituus on 4,37 metriä. Kuinka paljon listaa pitää vielä lyhentää?

127. Kolmion muotoisen purjehdusradan kääntöpoijut ovat kartan koordinaatiston origossa ja pisteissä $A(3, 0)$ ja $B(-2, 4)$. Koordinaatiston yksikkö vastaa 500 metrin matkaa luonnossa. Kuinka pitkä purjehdusrata on?

128. Television kuvasuhde (kuvan leveyden suhde korkeuteen) on $16 : 9$. Laske 50 tuuman television kuvaruudun leveys ja korkeus. Kuvaruudun tuumakoko on ruudun lävistäjän pituus. Yksi tuuma on 2,54 cm.

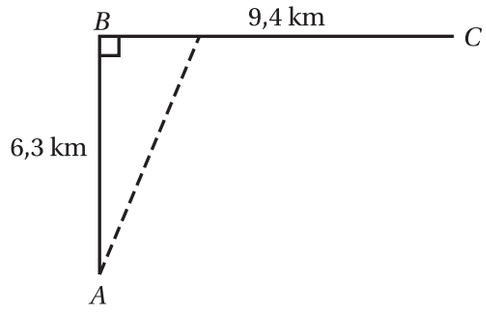
129. Hotellihuoneen sänky on 2,30 metriä pitkä ja 1,15 metriä leveä. Voidaanko sänky siirtää lattiaa pitkin pyöriensä varassa huoneen 2,55 metrin pituiselta päätyseinältä huoneen pitemmälle sivuseinälle?

130. Raskaita taakkoja vedetään virran yli pitkin vaakasuoraksi pingotettua 120 metriä pitkää vaijeria. Taakan paino venyttää vaijeria, jolloin taakka laskeutuu lähemmäs vedenpintaa, alimmilleen vaijerin keskikohdassa. Jotta taakka ei koskettaisi veteen, vaijerin keskikohta saa tällöin laskeutua korkeintaan 2,0 metriä. Kuinka paljon vaijeri saa enintään venyä?

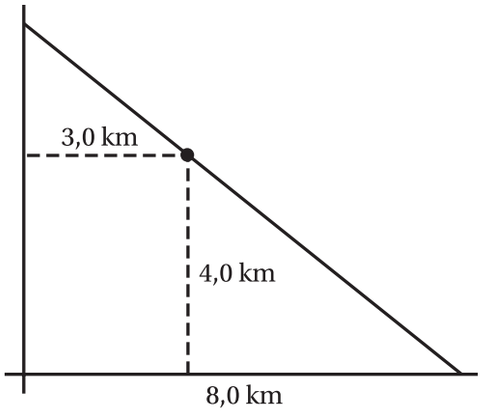
131. Aamupäivällä oli vaellettu kolme tuntia länteen ja iltapäivällä samalla vauhdilla neljä tuntia etelään. Leiriydyttäessä mitattiin kartalta, että oli päädytty 16 kilometrin etäisyydelle edellisestä leiripaikasta. Kuinka pitkä matka päivän aikana oli vaellettu? Mikä kävelynopeus oli?

132. Suorakulmaisen kolmion pitempi kateetti on 5,0 cm lyhyempää kateettia pitempi. Kolmion hypotenuusan pituus on 14,7 cm. Kuinka pitkät kolmion kateetit ovat?

133. Uusi tie rakennetaan paikasta A sellaiseen maantien BC kohtaan, joka on yhtä etäällä paikoista A ja C. Määritä tämä kohta tiellä BC.



134. Kylän etäisyys toisesta kohtisuoraan risteävästä päätiestä on 3,0 km ja toisesta 4,0 km. Kylän kautta kulkeva suora yhdystie kohtaa jälkimmäisen päätien 8,0 km:n etäisyydellä pääteiden risteyksestä. Kuinka pitkä yhdystie on?

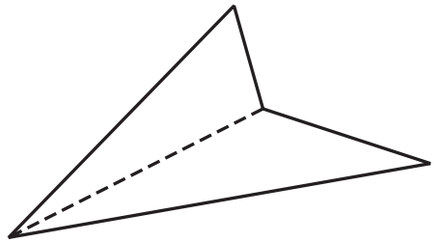


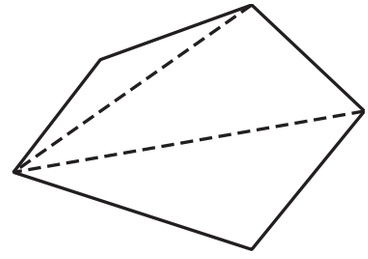
135. Kuinka kaukana laiva on satamasta, kun se satamasta lähdettyään on purjehtinut ensin 10,0 kilometriä koilliseen ja sitten 8,0 kilometriä itään?

Monikulmiot, suunnikas ja puolisuunnikas

ONGELMA 1

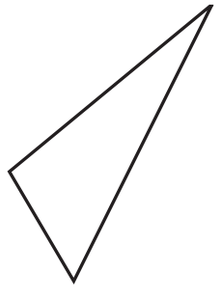
Kolmion kulmien summa on 180°. Päättele kuvioista nelikulmion ja viisikulmion kulmien summa.



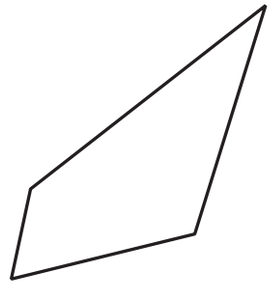


Monikulmiot

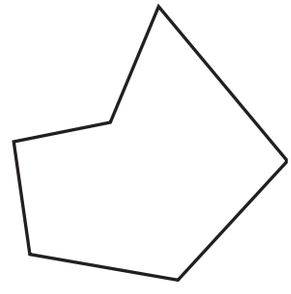
Monikulmiot luokitellaan sivujen lukumäärän mukaan.



kolmikulmio eli kolmio



nelikulmio

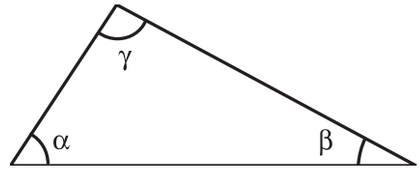


kuusikulmio

Monikulmion kulmien ja kärkipisteiden lukumäärä on sama kuin sivujen lukumäärä.

Monikulmion kulmien summa

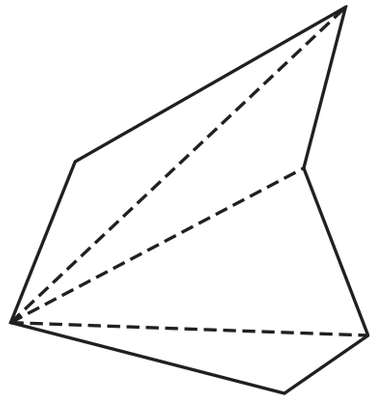
Kolmion kulmien summa on $180°$.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Summalauseen perusteleminen on tehtävänä 148.

Muiden monikulmioiden kulmien summa voidaan laskea jakamalla monikulmio yhdestä kärjestä alkavilla lävistäjillä kolmioiksi. Esimerkiksi kuusikulmion kulmien summa on $4 \cdot 180° = 720°$.

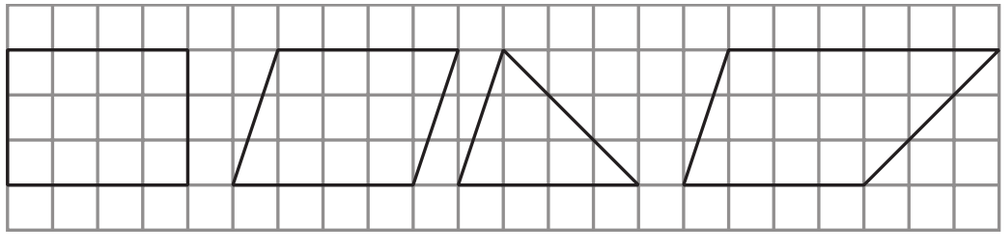


Yleisesti:

n-kulmion kulmien summa on $(n-2) \cdot 180°$.

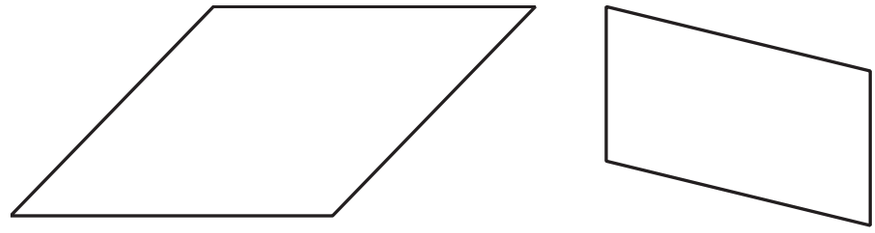
ONGELMA 2

Määritä ruudukkoon piirretyn suorakulmion, suunnikkaan, kolmion ja puolisuunnikkaan pinta-alat (yksikkönä ruutu). Suunnikkaasta alkaen jokaisen monikulmion pinta-alan laskumenetelmä voidaan perustella edellisen monikulmion laskumenetelmän avulla. Kuinka?



Suunnikkaan määritelmä

Nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, on *suunnikas*.



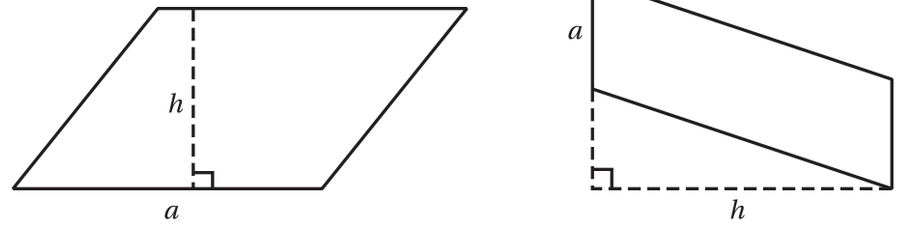
Suunnikkaan pinta-ala

Suunnikkaan pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = ah,$$

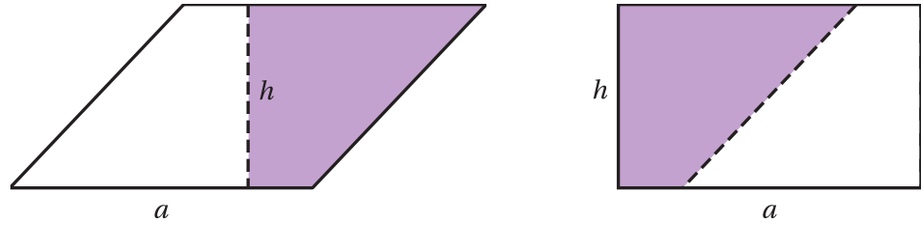
missä

a on suunnikkaan sivun pituus ja
h on sivulle a (tai sen jatkeelle) piirretty suunnikkaan korkeus.



Perustelu

Jos suunnikas katkaistaan pitkin korkeusjanaa ja puolikkaat liitetään toisista päistään yhteen, saadaan suorakulmio.



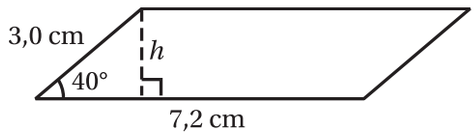
Kuvioilla on sama pinta-ala. Siis $A = ah$.

ESIMERKKI 1

Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 7,2 cm ja 3,0 cm. Suunnikkaan terävän kulman suuruus on 40°. Laske suunnikkaan pinta-ala.

RATKAISU

Piirretään korkeusjana ja lasketaan sen pituus h.



$$\sin 40° = \frac{h}{3{,}0}$$

$$h \approx 1{,}928 \text{ (cm)}$$

Suunnikkaan pinta-ala on

$$A = ah = 7{,}2 \cdot 1{,}928 \approx 14 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

VASTAUS

14 cm^2

Puolisuunnikkaan määritelmä

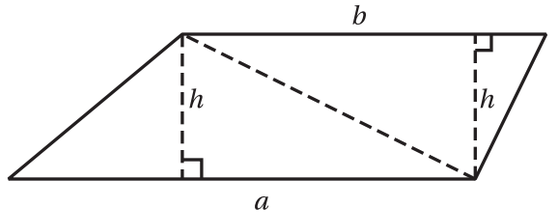
Nelikulmio, jossa on kaksi yhdensuuntaista sivua, on *puolisuunnikas*.

Puolisuunnikkaan pinta-ala voidaan laskea jakamalla puolisuunnikas lävistäjällä kahdeksi samankorkuiseksi kolmioksi. Tällä tavalla voidaan myös johtaa kaava puolisuunnikkaan pinta-alalle.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{ah + bh}{2}$$

$$= \frac{(a+b)h}{2} = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

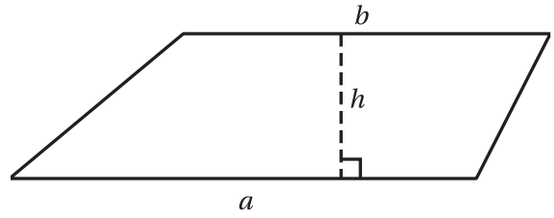


Saadussa lausekkeessa tekijä $\frac{a+b}{2}$ on puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvo ja h on puolisuunnikkaan korkeus.

Puolisuunnikkaan pinta-ala

Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon ja puolisuunnikkaan korkeuden tulo.

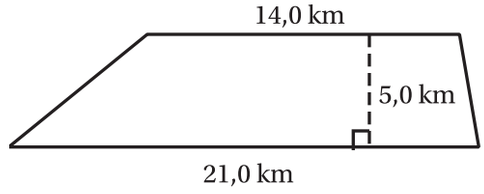
$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$



missä a ja b ovat puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ja h on puolisuunnikkaan korkeus.

ESIMERKKI 2

Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.



RATKAISU

$$A = \frac{14{,}0 + 21{,}0}{2} \cdot 5{,}0$$

Yhdensuuntaisten sivujen keskiarvon ja korkeuden tulo.

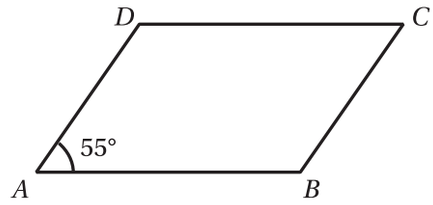
$$\approx 88 \text{ (km}^2\text{)}$$

VASTAUS

88 km^2

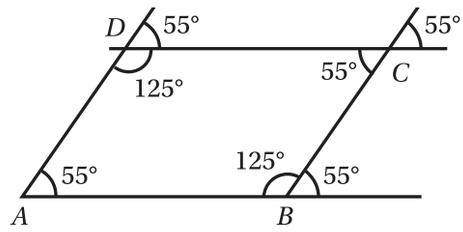
ESIMERKKI 3

Suunnikkaan $ABCD$ kulman A suuruus on $55°$. Kuinka suuret suunnikkaan muut kulmat ovat?



RATKAISU

Jatketaan suunnikkaan sivuja. Koska suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaiset, kuvioon muodostuu kulman A kanssa yhtä suuria samankohtaisia kulmia. Erityisesti vastakkaisen kulman C suuruus on myös $55°$.



Suunnikkaan $ABCD$ kulmat B ja D ovat $55°$:n kulman vieruskulmia, joten niiden suuruus on $180° - 55° = 125°$.

VASTAUS

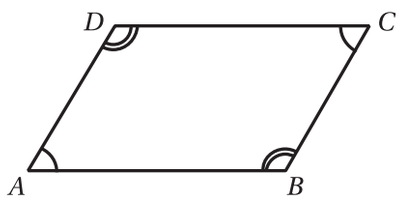
$\sphericalangle B = 125°$, $\sphericalangle C = 55°$, $\sphericalangle D = 125°$

Suunnikkaan ominaisuuksia

Suunnikkaan kulmat

Suunnikkaan vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret.

$\sphericalangle A = \sphericalangle C$ ja $\sphericalangle B = \sphericalangle D$



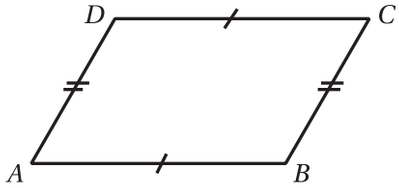
Suunnikkaan vierekkäisten kulmien summa on $180°$.

Tämä ominaisuus voidaan perustella yleisesti samalla tavalla kuin tehtiin esimerkissä 3.

Suunnikkaan sivut

Suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

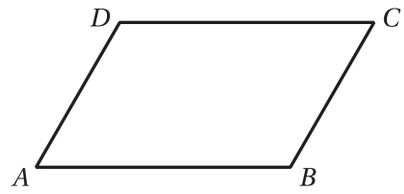
$AB = DC$ ja $BC = AD$



Tätä ominaisuutta ei kurssissa perustella.

Suunnikkaan luonnehdinta sivujen pituuksien avulla

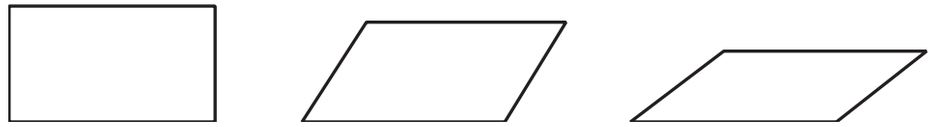
Jos nelikulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, nelikulmio on suunnikas.



Jos $AB = DC$ ja $AD = BC$, niin nelikulmio $ABCD$ on suunnikas.

Nelikulmio voidaan siis osoittaa suunnikkaaksi osoittamalla, että sen vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

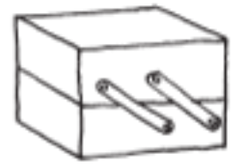
Jos nelisivuisen kehikon vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, niin edellisen ominaisuuden perusteella vastakkaiset sivut ovat myös yhdensuuntaiset. Jos sivut on liitetty toisiinsa nivelillä, vastakkaisten sivujen yhdensuuntaisuus säilyy, vaikka kehikon muotoa muutetaan.



Tätä ilmiötä hyödynnetään monissa rakenteissa.

puutarhakeinu

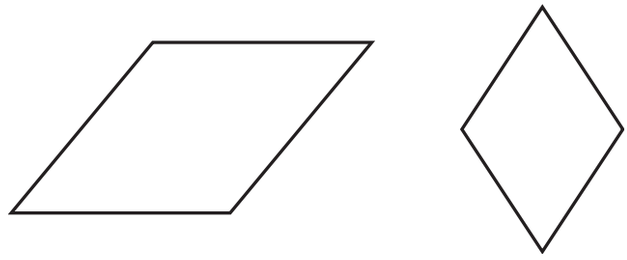
leikkikentän keinu



työkalupakki

ESIMERKKI 4

Nelikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät, on *neljäkäs* eli *vinoneliö*. Osoita, että jokainen neljäkäs on suunnikas.



RATKAISU

Neljäkkään vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät. Edellä todetun ominaisuuden perusteella jokainen nelikulmio, jonka vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät, on suunnikas. Siis neljäkäs on suunnikas.

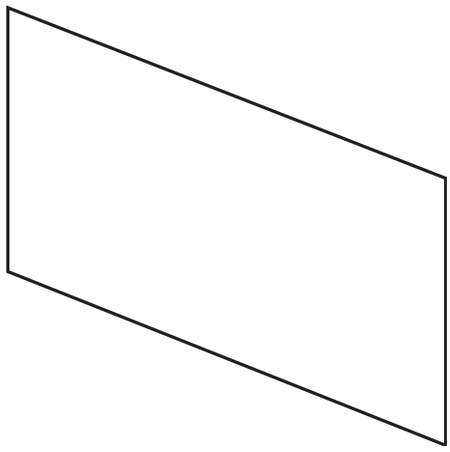
HARJOITUKSIA

Sarja I

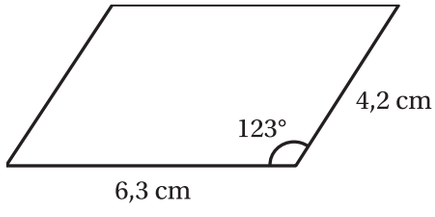
136. Kuinka monta yli 180°:n kulmaa voi nelikulmiossa enintään olla? Perustele. Piirrä nelikulmio, jossa on suurin mahdollinen määrä yli 180°:n kulmia.

137. Mikä kahdeksankulmion kulmien summa on? Jos kahdeksankulmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret, niin kuinka suuret ne ovat?

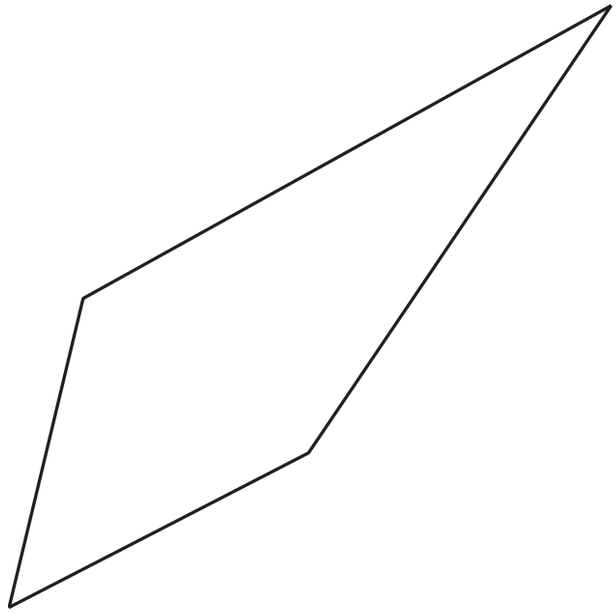
138. Tee tarvittavat mittaukset ja laske suunnikkaan pinta-ala.



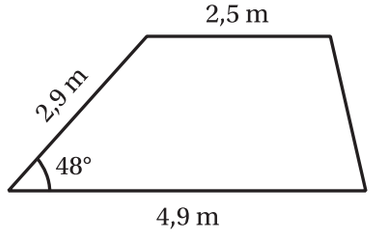
139. Laske suunnikkaan pinta-ala.



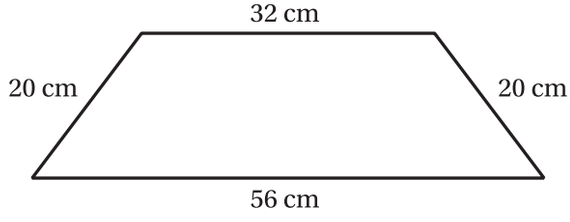
140. Tee tarvittavat mittaukset ja laske puolisuunnikkaan pinta-ala.



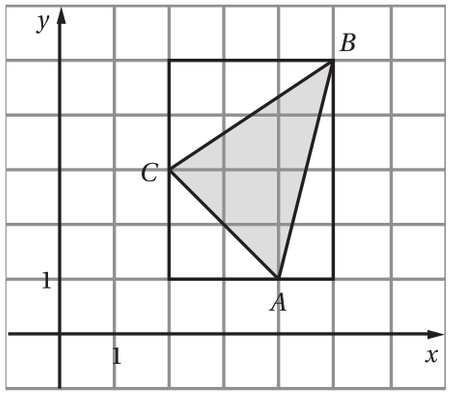
141. Laske puolisuunnikkaan
a) korkeus **b)** pinta-ala.



142. *Tasakylkisessä puolisuunnikkaassa* on kaksi yhdensuuntaista sivua, ja toiset kaksi sivua (kyljet) ovat yhtä pitkät. Laske kuvion tasakylkisen puolisuunnikkaan
a) korkeus **b)** pinta-ala.



143. Koordinaatistoon piirretyn monikulmion pinta-ala voidaan laskea usein niin, että monikulmio ympäröidään suorakulmiolla, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kuvion kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(4, 1)$, $B(5, 5)$ ja $C(2, 3)$. Laske kolmion ABC pinta-ala.



144. Kolmion muotoisen metsäpalstan kärjet ovat kartan koordinaatiston pisteissä $(7, 1)$, $(3, 3)$ ja $(1, 9)$. Koordinaatiston yksikkö vastaa luonnossa 200 metriä. Kuinka suuri metsäpalstan pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina. Käytä hyväksi edellisen tehtävän menetelmää.

145. Suunnikkaan $ABCD$ kulma A on $115°$. Kuinka suuret suunnikkaan muut kulmat ovat?

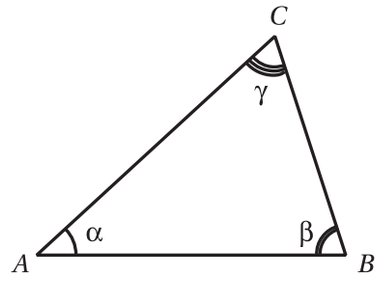
146. Neljäkkään sivujen pituus on 7,2 cm, ja neljäkkään terävän kulman suuruus on $39°$. Laske neljäkkään pinta-ala.

147. Leijan runko rakennetaan liittämällä keskikohdistaan kohtisuorasti yhteen kaksi rimaa, joiden pituudet ovat 64 cm ja 112 cm.

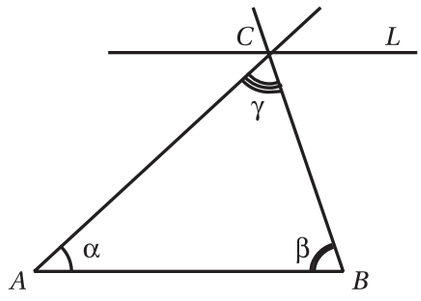
a) Millainen nelikulmio leija on?

b) Laske leijan pinta-ala.

148. Tehtävänä on osoittaa, että kolmion kulmien summa on $180°$.



Osoitetaan, että $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.
Apupiirrokseksi piirretään kolmion ABC kärjen C kautta vastakkaisen sivun AB suuntainen suora L.



a) Merkitse kuvioon kaikki kulmat, jotka ovat yhtä suuria kuin kulma α, ja kaikki kulmat, jotka ovat yhtä suuria kuin kulma β.

b) Perustele kuvion avulla, että $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Sarja II

149. **a)** Mikä on kymmenkulmion kulmien summa?

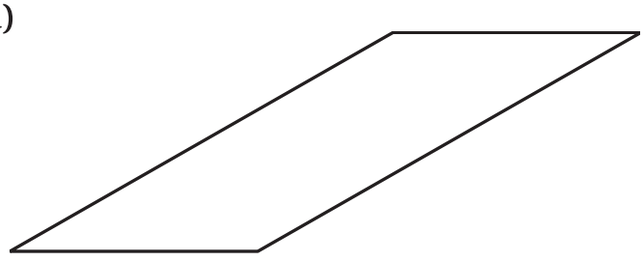
b) Jos kymmenkulmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret, niin kuinka suuret ne ovat?

150. **a)** Kuinka monta yli 180°:n kulmaa viisikulmiossa voi olla? Perustele. Piirrä viisikulmio, jossa on suurin mahdollinen määrä yli 180°:n kulmia.

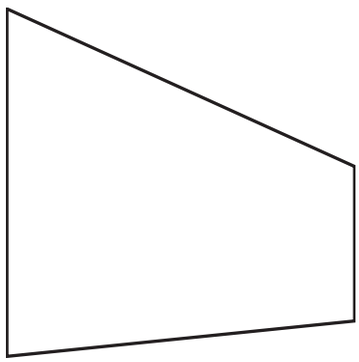
b) Kuinka monta suorakulmaa viisikulmiossa voi olla? Perustele. Piirrä viisikulmio, jossa on suurin mahdollinen määrä suorakulmia.

151. Tee tarvittavat mittaukset ja laske suunnikkaan ja puolisuunnikkaan pinta-alat.

a)

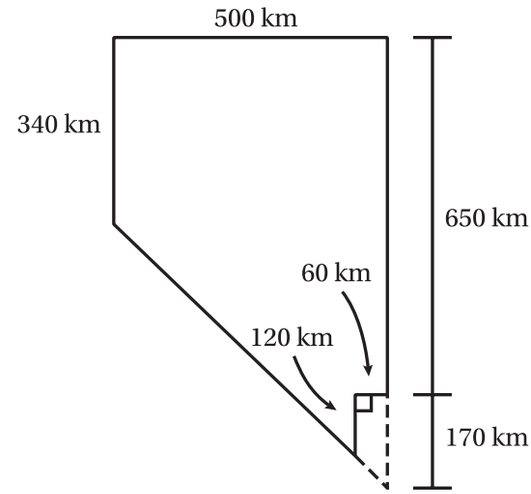


b)

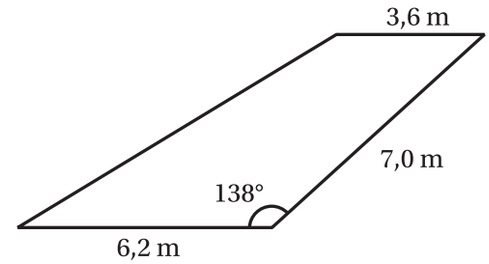


152. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 8,8 m ja 3,4 m. Suunnikkaan terävän kulman suuruus on 51°. Kuinka suuri suunnikkaan pinta-ala on?

153. Monien Yhdysvaltain osavaltioiden rajat ovat kuin viivaimella vedetyt. Laske hieman yksinkertaistetun kuvion avulla Nevadan pinta-ala.

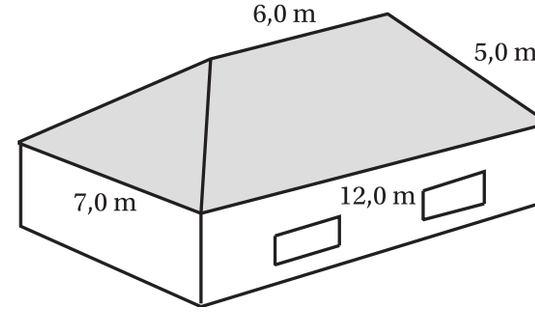


154. Laske puolisuunnikkaan pinta-ala.



155. Kolmion ABC kärjet ovat $A(-2, 1)$, $B(3, 3)$ ja $C(1, 5)$. Kuinka suuri kolmion ABC pinta-ala on? Käytä hyväksi tehtävän 143 menetelmää.

156. Omakotitalon aumakatto muodostuu kahdesta samanlaisesta tasakylkisestä puolisuunnikkaasta (tehtävä 142) ja kahdesta samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta. Laske katon pinta-ala.



157. Nelikulmion $ABCD$ kärkipisteet ovat $A(0, 5)$, $B(2, 1)$, $C(5, -1)$ ja $D(6, 3)$. Kuinka suuri nelikulmion $ABCD$ pinta-ala on?

158. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 10,0 cm ja 6,1 cm. Pitempien sivujen etäisyys on 4,2 cm. Kuinka suuret suunnikkaan kulmat ovat?

159. Suunnikkaan $ABCD$ kulman A suuruus on $50°$. Suunnikkaan kärkipisteiden A ja B kautta piirretään suorat, jotka puolittavat suunnikkaan kulmat A ja B. Kuinka suuri suorien välinen kulma on?

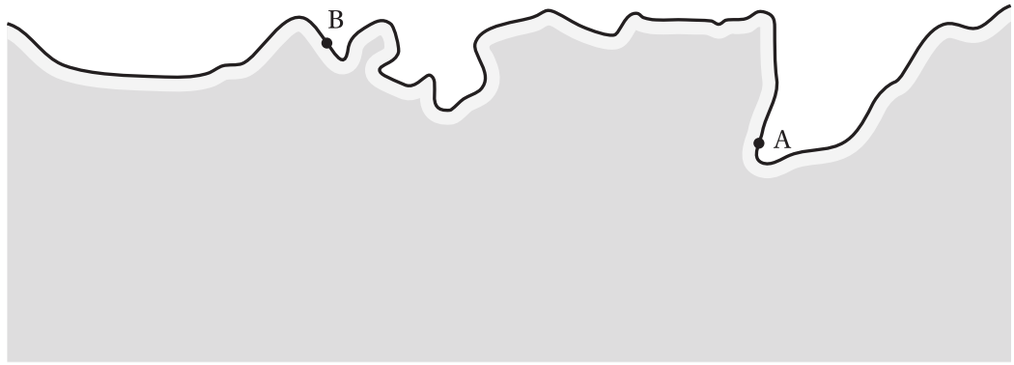
160. Kaksi yhtenevää tasakylkistä kolmiota liitetään yhteen pitkin kantasivuja. Minkätyyppinen nelikulmio näin syntyy? Laske nelikulmion pinta-ala, jos kolmioiden kanta on 8,0 cm ja kannalle piirretty korkeus 6,0 cm.

161. Kolmio leikattiin yhden sivun suuntaisesti kahteen osaan. Toinen osista on puolisuunnikas, jonka yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 15 ja 10 ja yhdensuuntaisten sivujen etäisyys 3. Laske alkuperäisen kolmion
a) korkeus **b)** pinta-ala.

8 Ympyrä ja säännölliset monikulmiot

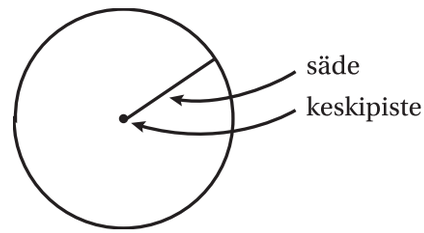
ONGELMA

Merihätään joutunut alus ilmoittaa olevansa 30 km:n etäisyydellä merivartioasemasta A ja 40 km:n etäisyydellä asemasta B. Määritä aluksen sijainti alla olevalla kartalla, jonka mittakaava on $1 : 1\,000\,000$.

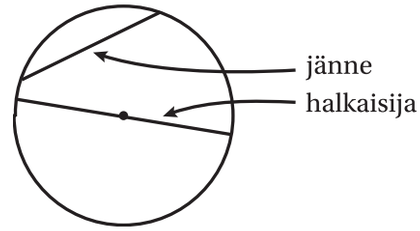


Ympyrä

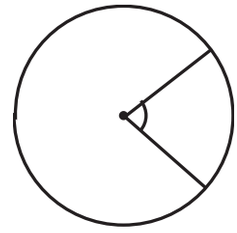
Ympyrä muodostuu niistä tason pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä (*säde*) kiinteästä pisteestä (*keskipiste*).



Jänne on kahden ympyrän pisteen välinen jana.
Halkaisija on keskipisteen kautta kulkeva jänne.



Kulma, jonka kärki on ympyrän keskipisteessä, on *keskuskulma*.

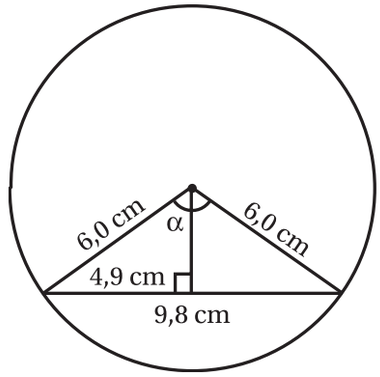


ESIMERKKI 1

Ympyrän säde on 6,0 cm. Ympyrälle on piirretty jänne, jonka pituus on 9,8 cm. Kuinka suuri jännettä vastaava keskuskulma on?

RATKAISU

Jänne on kanta tasakylkisessä kolmiossa, jonka kyljet ovat säteitä ja jonka huippukulma on jännettä vastaava keskuskulma.



Kolmioon täydennetään kannalle piirretty korkeusjana ja ratkaistaan huippukulman puolikas α.

$$\sin\alpha = \frac{4{,}9}{6{,}0}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{4{,}9}{6{,}0}\right) \approx 54{,}752°$$

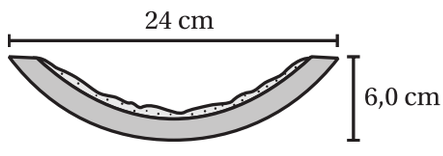
Keskuskulma on $2\alpha \approx 2 \cdot 54{,}752° \approx 110°$.

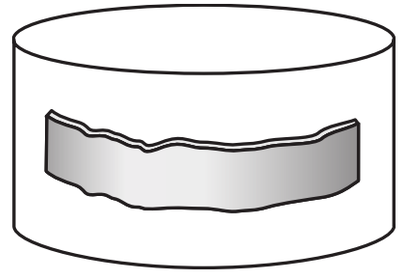
VASTAUS

110°

ESIMERKKI 2

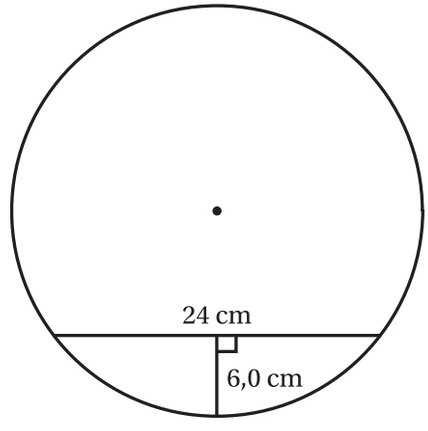
Arkeologisissa kaivauksissa löydettiin sirpale. Sirpaleen uskottiin olevan peräisin ruukusta, jonka pohjan suuntaiset poikkileikkaukset ovat ympyröitä. Mikä on ollut ehjän ruukun ulkoläpimitta?



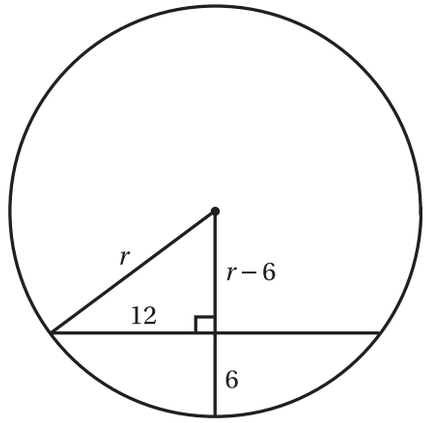


RATKAISU

Sirpaleen leveys 24 cm on ruukun poikkileikkausympyrän jänteen pituus. Sirpaleen korkeus 6,0 cm on jänteen ja kaaren rajaaman ympyrän *segmentin* korkeus.



Piirretään säde jänteen päätepisteeseen sekä jänteen keskipisteen kautta kulkeva säde. Muodostuu suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa on säde r ja jonka kateetit ovat $r-6$ ja 12. Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö, josta ratkaistaan r.



$$r^2 = (r-6)^2 + 12^2$$

$$r = 15$$

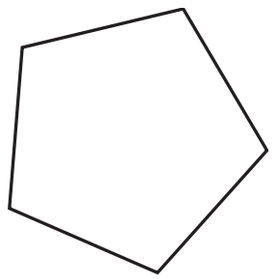
Ratkaisu symbolisella laskimella.

Siis poikkileikkauksen säde on 15 cm ja ruukun ulkoläpimitta (poikkileikkauksen halkaisija) on $2 \cdot 15 \text{ cm} = 30 \text{ cm}$.

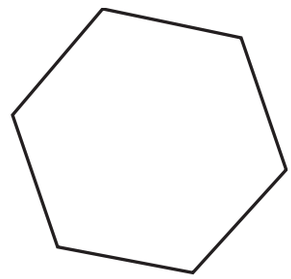
VASTAUS 30 cm

Säännöllinen monikulmio

Monikulmio, jonka kaikki sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki kulmat yhtä suuret, on *säännöllinen monikulmio*.



säännöllinen viisikulmio



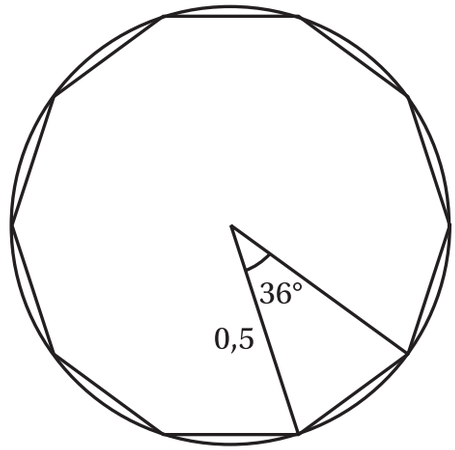
säännöllinen kuusikulmio

ESIMERKKI 3

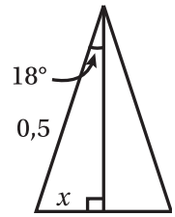
Ympyrän halkaisijan pituus on 1. Laske ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 10-kulmion piirin likiarvo kahden desimaalin tarkkuudella. Sanonta *ympyrän sisään piirretty* monikulmio tarkoittaa monikulmiota, jonka kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä.

RATKAISU

Säännöllisellä monikulmiolla ja ympyrällä, joka kulkee monikulmion kaikkien kärkien kautta, on yhteinen keskipiste. Keskipisteestä vierekkäisiin kärkiin piirretyt säteet muodostavat keskuskulman, jonka suuruus on $360° : 10 = 36°$.



Sivun puolikas x ratkaistaan tasakylkisestä kolmiosta, johon piirretään korkeusjana huipusta kannalle.



$$\sin 18° = \frac{x}{0{,}5}$$

$$x \approx 0{,}1545$$

10-kulmion sivun pituus on $2x$ ja piiri

$$p = 10 \cdot 2x = 20x \approx 20 \cdot 0{,}1545 = 3{,}09.$$

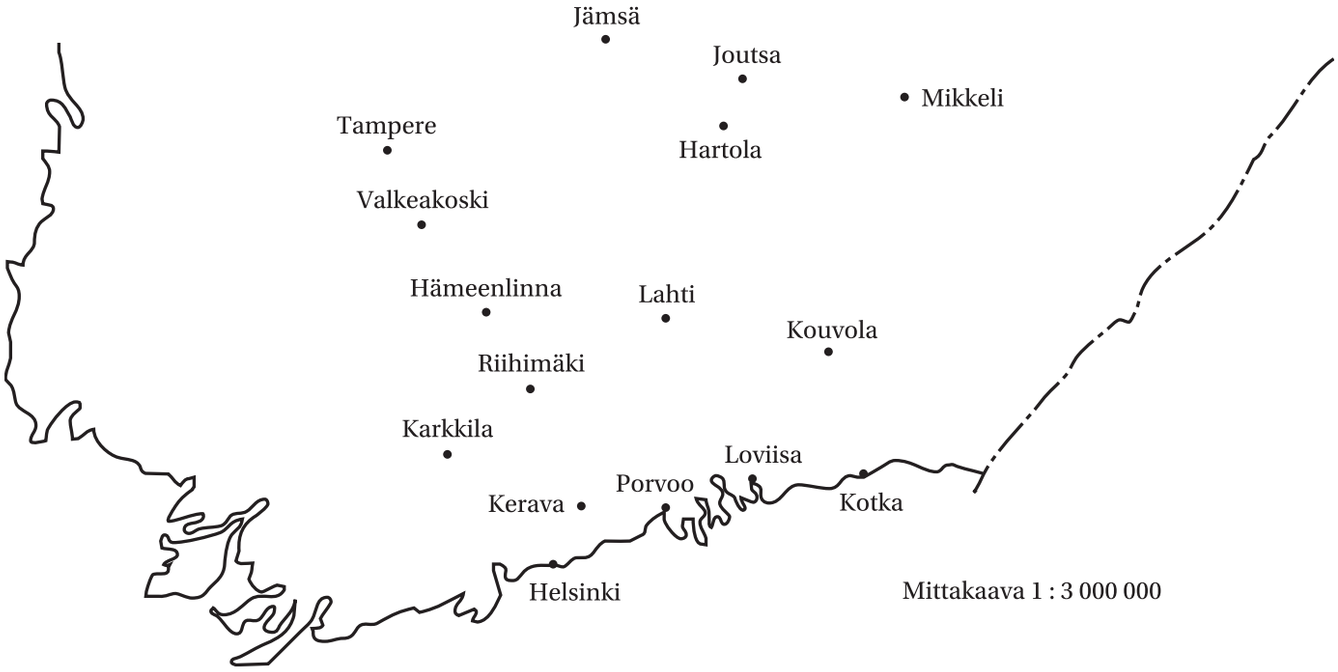
VASTAUS

3,09

HARJOITUKSIA

Sarja I

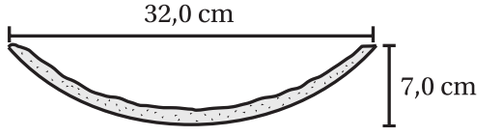
162. Lahdessa sijaitsevan radiolähettimen kuuluvuusalue ulottuu 75 kilometrin päähän. Selvitä mittaamatta paikkakuntien etäisyyttä Lahdesta, mitkä karttaan merkityt paikkakunnat ovat kuuluvuusalueella. Kartan mittakaava on 1 : 3 000 000.



163. Ympyrän säde on 8,50 cm. Laske
a) 5,60 cm:n pituista jännettä vastaavan keskuskulman suuruus
b) 72,0°:n keskuskulmaa vastaavan jänteen pituus.

164. Ympyrään, jonka säde on 25 cm, on piirretty 48 cm:n pituinen jänne. Jänne ja sen päätepisteisiin piirretyt säteet rajaavat kolmion. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

165. Kuvion mukaisen sirpaleen uskotaan olevan peräisin ruukusta, jonka pohjan suuntaiset poikkileikkaukset ovat ympyrän muotoisia. Määritä ruukun ulkoläpimitta.



166. Millä nimellä tunnetaan säännöllinen
a) kolmikulmio
b) nelikulmio?

167. Ympyrän halkaisijan pituus on 1. Laske ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 20-kulmion piiri kolmen desimaalin tarkkuudella.

168. Tasapaksuksi veistetyn tukin läpimitta on 26 senttimetriä, ja tukin poikkileikkaus on ympyrän muotoinen. Tukista sahataan mahdollisimman paksu parru, jonka poikkileikkaus on neliön muotoinen. Kuinka paksu parru tukista saadaan?

169. Säännöllisen viisikulmion sivun pituus on 8,0 cm. Laske viisikulmion pinta-ala.

170. Ympyrän keskipiste on origossa, ja ympyrän säde on 11. Onko piste $(9, 6)$ ympyrällä, ympyrän sisällä vai ympyrän ulkopuolella?

171. Kahdella ympyrällä, joista suuremman säde on 17, on sama keskipiste. Suuremman ympyrän jänteestä, jonka pituus on 30, jää pienemmän ympyrän sisään osa, jonka pituus on 12. Mikä pienemmän ympyrän säde on?

172. Paikkakunnalla A sijaitsevan saariston radion lähetys kantautuu 85 km:n päähän. Laiva, joka purjehtii suoraviivaisesti kohti paikkakuntaa B, saapuu radioaseman kuuluvuusalueelle ja purjehdittuaan 80 km poistuu kuuluvuusalueelta. Kuinka etäällä laiva tällöin on paikkakunnasta B? Paikkakuntien A ja B etäisyys toisistaan on 195 km.

173. Kun säännöllisen kuusikulmion keskipiste yhdistetään kärkiin, syntyy kuusi tasakylkistä kolmiota.
a) Kuinka suuria ovat näiden kolmioiden kulmat?
b) Minkä tyyppisiä nämä kolmiot ovat?
c) Kuinka säännöllisen kuusikulmion voi piirtää harpilla ja viivaimella kulmia mittaamatta? Piirrä säännöllinen kuusikulmio.

Sarja II

174. Ympyrän säde on 12,0 cm. Ympyrään piirretään 150°:n keskuskulma. Pisteet, joissa keskuskulman kyljet leikkaavat ympyrän, yhdistetään ympyrän jänteellä. Kuinka pitkä jänne on?

175. Ympyrän säde on 7,4 cm. Ympyrälle piirretyn jänteen lyhin etäisyys keskipisteestä on 2,4 cm. Kuinka pitkä jänne on?

176. Ympyrälle, jonka säde on 14,7 cm, on piirretty samasta kehän pisteestä halkaisija ja jänne. Jänteen pituus on 19,2 cm. Kuinka suuri jänteen ja halkaisijan välinen kulma on?

177. Tasaiselle pehmeälle hiekalle pudonnut pallo jätti maahan kuopan, jonka halkaisija oli 23 cm ja syvyys 6,5 cm. Kuinka suuri pallon säde oli? (Ohje: Piirrä sivukuva.)

178. Ympyrän säde on 1. Laske kolmen desimaalin tarkkuudella ympyrän sisään piirretyn säännöllisen 20-kulmion pinta-ala.

179. Teltan pohja on muodoltaan säännöllinen kahdeksankulmio, jonka sivun pituus on 2,9 m. Jotta teltta voitaisiin pystyttää, on ensin luotava lumi pois riittävän suurelta ympyrän muotoiselta alueelta. Kuinka suuri alueen halkaisijan tulee vähintään olla?

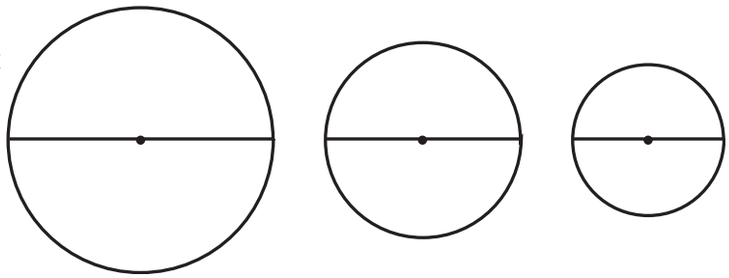
180. Ympyrän keskipiste on $(2, 5)$ ja säde 13. Onko piste
a) $(-5, 16)$ **b)** $(14, 0)$
ympyrällä, ympyrän sisällä vai ympyrän ulkopuolella?

181. Radioasemilla Trash FM ja News FM on sama lähetysantenni, josta aseman Trash FM lähetys kantautuu 75 km:n ja aseman News FM lähetys 65 km:n päähän. Kuuluvuusalueita halkovasta suorasta maantiestä 90 km:n pituinen osuus on aseman Trash FM kuuluvuusalueella. Kuinka pitkä osuus tiestä on aseman News FM kuuluvuusalueella?

Ympyrän kehän ja kaaren pituus

Luku π

Kaikki ympyrät ovat keskenään yhdenmuotoisia, joten suhde



$$\frac{\text{ympyrän kehän pituus}}{\text{ympyrän halkaisijan pituus}}$$

ei riipu ympyrän koosta. Suhde on yksi tärkeimmistä matemaattisista vakioista. Suhdetta merkitään kreikkalaisella kirjaimella π (pii).

$$\pi = \frac{\text{ympyrän kehän pituus}}{\text{ympyrän halkaisijan pituus}}$$

Luku π on päättymätön ja jaksoton desimaaliluku, jonka kaksidesimaalinen likiarvo on 3,14.*

---

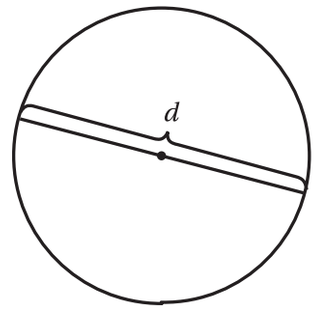
* Luku π on 60 desimaalin tarkkuudella 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974945. Vanhan testamentin Kuningasten kirjassa (1. Kun. 7:23) π on 3: ”Hiram valoi myös pyöreän altaan, jota kutsuttiin mereksi. Se oli reunasta reunaan kymmenen kyynärän levyinen, korkeutta sillä oli viisi kyynärää, ja vasta kolmenkymmenen kyynärän pituinen mittanuora ulottui sen ympäri.”
Noin 2000 vuotta ennen ajanlaskumme alkua babylonialaiset otaksuivat, että π on joko 3 tai $3\frac{1}{8}$. Kreikkalainen Ptolemaios käytti π:n arvoa $\frac{377}{120}$. Kiinalainen Tsi Ch’ung-Chi löysi 400-luvulla π:lle arvon $\frac{355}{113}$, jota parempi murtolukuarvio on vasta $\frac{103\,993}{33\,102}$. 1700-luvulla todistettiin, että luku π on irrationaaliluku eli sitä ei voida ilmaista murtolukuna.
Hollantilainen Ludolph von Ceulen sai koko elinaikanaan (1539–1610) laskeutuksi π:n 35 ensimmäistä desimaalia. Tällä hetkellä (vuonna 2012) tunnetaan π:n 10 biljoonaa (10 000 000 000 000) ensimmäistä desimaalia. Myös desimaalien muistamisesta kilpaillaan. Vuonna 2009 ukrainalainen Andri Sljusartšuk luetteli ulkomuistista π:n 30 miljoonaa ensimmäistä desimaalia.

Ympyrän kehän pituuden laskukaava seuraa suoraan luvun π määritelmästä.

Ympyrän kehän pituus

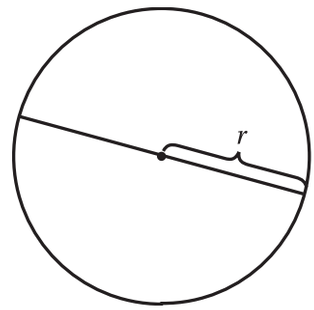
Ympyrän kehän pituus on halkaisijan pituus kerrottuna luvulla π.

$$p = \pi d$$



Tai toisin sanottuna: säde kerrottuna kahdella ja luvulla π.

$$p = 2\pi r$$



ESIMERKKI 1

Pyörä, jonka halkaisija on 63 cm, pyörähtää kerran. Kuinka pitkän matkan pyörä kulkee?

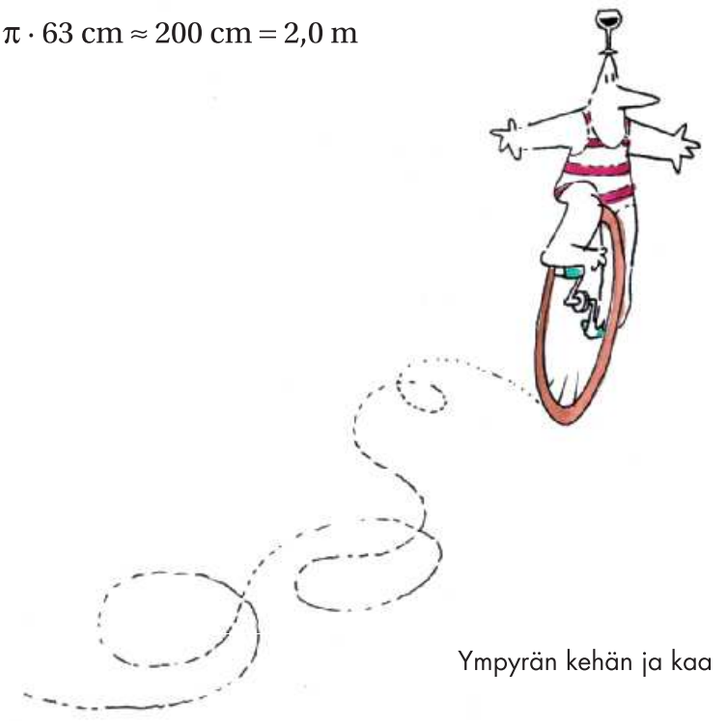
RATKAISU

Matka, jonka pyörä kulkee yhdellä kierroksella, on pyörän kehän pituus.

$$p = \pi d = \pi \cdot 63 \text{ cm} \approx 200 \text{ cm} = 2{,}0 \text{ m}$$

VASTAUS

2,0 m



ESIMERKKI 2

Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 kilometriä. Laske maapallon säteen pituus.

RATKAISU

Kaavasta $p = 2\pi r$ ratkaistaan säde r.

$2\pi r = p \quad | : 2\pi$

$r = \frac{p}{2\pi}$ Sijoitetaan $p = 40\,000$ (km).

$= \frac{40\,000}{2\pi} = 6366{,}197\ldots$ Pyöristetään lähtötiedon mukaiseen kolmen numeron tarkkuuteen.

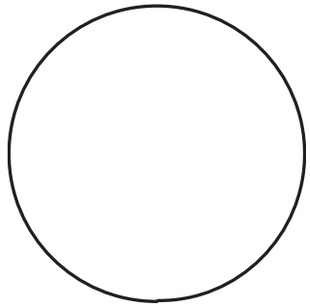
$\approx 6\,370$ (km)

VASTAUS

6 370 km

ONGELMA

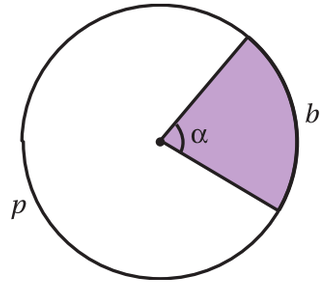
Ympyrän kehän pituus on 10,8 cm.
Kuinka pitkä on ympyrän
a) 180°:n keskuskulman kaari
b) 120°:n keskuskulman kaari
c) 1°:n keskuskulman kaari
d) 25°:n keskuskulman kaari?



Kaaren pituus

Ympyrän kaaren pituuden suhde ympyrän kehän pituuteen on yhtä suuri kuin kaaren keskuskulman suuruuden suhde täysikulman suuruuteen 360°.

$$\frac{b}{p} = \frac{\alpha}{360°}$$



b = kaaren pituus
α = kaaren keskuskulma
p = ympyrän kehän pituus

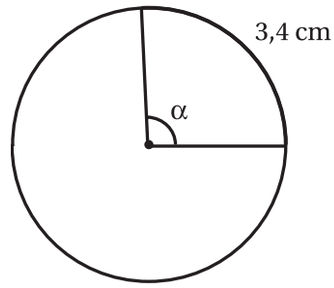
Jos tunnetaan ympyrän säde r ja keskuskulma α, niin kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r.$$

”α 360.-osaa” ympyrän kehän pituudesta.

ESIMERKKI 3

Ympyrään, jonka kehän pituus on 13,2 cm, on piirretty 3,4 cm:n pituinen kaari. Kuinka suuri kaaren keskuskulma on?



RATKAISU

Kaaren pituuden suhde kehän pituuteen on yhtä suuri kuin keskuskulman α suhde täysikulmaan $360°$.

$$\frac{3,4}{13,2} = \frac{\alpha}{360°}$$

Ratkaistaan symbolisella laskimella tai kertomalla ristiin.

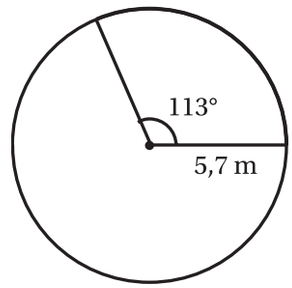
$$\alpha \approx 93°$$

VASTAUS

$93°$

ESIMERKKI 4

Kuinka pitkä on $113°$:n keskuskulman kaari ympyrässä, jonka säde on 5,7 m?



RATKAISU

Kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

Sijoitetaan $\alpha = 113°$ ja $r = 5,7$.

$$= \frac{113°}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 5,7 \approx 11,2 \text{ (m)}.$$

VASTAUS

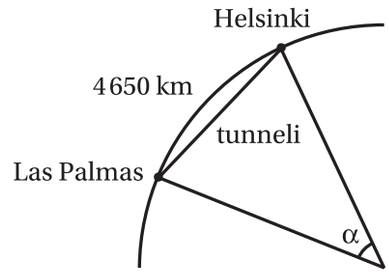
11,2 m

ESIMERKKI 5

Helsingin ja Las Palmasin etäisyys on 4 650 km. Kuinka paljon lyhyempi olisi kaupunkeja yhdistävä suora tunneli? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

RATKAISU

Paikkakuntien välinen etäisyys on niiden kautta kulkevan ympyrän kaaren pituus. Ympyrän keskipiste on maapallon keskipisteessä. Ympyrän kehän pituus on maapallon ympärysmitta, ja ympyrän säde on maapallon säde.



Tunnelin pituus on paikkakuntia yhdistävän jänteen pituus.

Kaaren pituus on 4 650 km. Jänteen pituuden laskemiseksi lasketaan keskuskulman α suuruus.

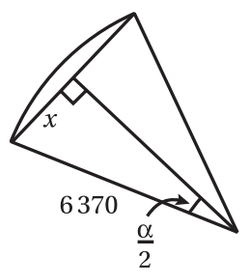
$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{4\ 650}{40\ 000}$$

$$\alpha = 41{,}85°$$

Keskuskulman α suhde täysikulmaan on yhtä suuri kuin kaaren pituuden suhde kehän pituuteen.

Jänteen puolikas x ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta, jossa terävä kulma

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{41{,}85°}{2} = 20{,}925°.$$



$$\sin 20{,}925° = \frac{x}{6\ 370}$$

$$x \approx 2\ 275 \text{ (km)}$$

Jänteen pituus on

$$2x \approx 2 \cdot 2\ 275 = 4\ 550 \text{ (km)}.$$

Kaaren pituuden ja jänteen pituuden erotus on

$$4\ 650 \text{ km} - 4\ 550 \text{ km} = 100 \text{ km}.$$

VASTAUS

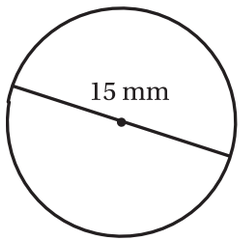
100 km

HARJOITUKSIA

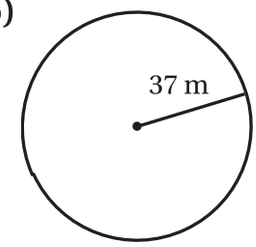
Sarja I

182. Laske ympyrän kehän pituus.

a)

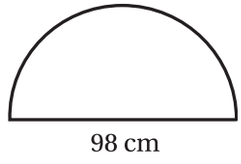


b)



183. Pyörän halkaisija on 73 cm. Kuinka pitkän matkan pyörä etenee, kun se pyörähtää 20 kertaa?

184. Puoliympyrän muotoinen ikkuna ympäröidään sisustusnauhalla (boordilla). Kuinka pitkä nauha tarvitaan?



185. **a)** Ympyrän kehän pituus on 2,52 m. Kuinka pitkä ympyrän säde on?
b) Puunrungon ympärysmitta on 3,7 m. Mikä rungon läpimitta on?

186. Ympyrän kehän pituus on 12,8 cm ja kehältä erotetun kaaren pituus 9,3 cm. Kuinka suuri kaaren keskuskulma on?

187. Ympyrän säde on 7,2 dm. Kuinka pitkä on ympyrän kaari, jonka keskuskulma on 230°?

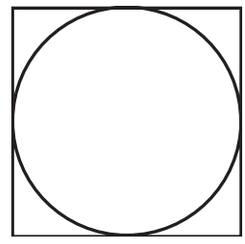
188. Rannekellon sekuntiosoittimen pituus on 12 mm. Kuinka pitkän matkan osoittimen kärki kulkee
a) sekunnissa
b) minuutissa
c) vuorokaudessa?

189. Likimain ympyrän muotoisen järven ympärysmitta on 7,5 kilometriä. Matka naapurimökille pitkin rannassa kulkevaa polkua on 3,1 kilometriä. Kuinka paljon lyhyempi suora soutumatka on?

190. **a)** Ilmaise puoliympyrän piiri ympyrän säteen pituuden r lausekkeena.
b) Kuinka pitkä ympyrän säde on, jos puoliympyrän piiri on 73,8 cm?

191. Kaupunkia kiertävät kaksi kehätietä ovat muodoltaan samankeskisiä ympyröitä. Teiden etäisyys toisistaan on 10 km. Kuinka paljon ulompi kehätie on sisempää kehätietä pitempi, jos sisemmän säde on
a) 12 km **b)** 35 km **c)** a km?

192. Neliön sisään on piirretty ympyrä, joka sivuaa neliön kaikkia sivuja. Määritä ympyrän kehän pituuden suhde neliön piiriin. Ilmoita suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
(Ohje: Tehtävässä ei ole annettu neliön sivun pituutta, joten ratkaisun tulee osoittaa, että suhde ei riipu neliön koosta. Merkitse neliön sivua a, määritä ympyrän halkaisija ja muodosta ja sievennä suhde.)



Sarja II

193. Mikä ympyrän kehän pituus on, jos ympyrän
a) halkaisija on 7,2 m
b) säde on 3,19 m?

194. Pyörän halkaisija on 53 cm. Kuinka monta kertaa pyörä pyörähtää kilometrin matkalla?

195. Short track -pikaluistelun 111,12 metrin pituinen rata muodostuu kahdesta yhdensuuntaisesta 28,07 metrin pituisesta suorasta ja kahdesta puoliympyrän muotoisesta kaarteesta. Mikä kaarteiden säde on?

196. Ympyrän kehän pituus on 75 cm. Kuinka pitkä on ympyrän kaari, jonka keskuskulma on 56°?

197. Ympyrän säde on 1,9 cm. Ympyrälle on piirretty kaari, jonka pituus on 1,9 cm. Kuinka suuri kaaren keskuskulma on?

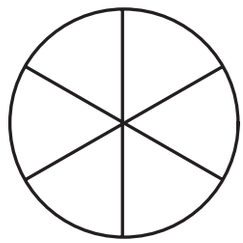
198. Yksi meripeninkulma (nautical mile) on yhden kulmaminuutin suuruista keskuskulmaa vastaavan päiväntasaajan kaaren pituus. Kulmaminuutti on asteen kuudeskymmenesosa. Päiväntasaajan pituus on 40 000 km.
a) Kuinka monta metriä yksi meripeninkulma on?
b) Kahden purjehduskauden jälkeen veneen loki (matkamittari) näytti veneellä kuljetun 512 meripeninkulmaa. Muuta matka kilometreiksi.

199. Kuu kiertää Maata likimain ympyrän muotoisella radalla, jonka säde on 60 maapallon sädettä. Kiertoaika on noin 656 tuntia. Mikä on Kuun vauhti radallaan? Maapallon säde on 6 370 km.

200. Tornikellon tuntiosoittimen kärki kulkee 20 minuutissa 23 senttimetrin matkan. Kuinka pitkä osoitin on?

201. Suomenlahden 120 kilometriä leveän kohdan poikki rakennetaan täysin suora tunneli, jonka molemmat päät ovat aivan vesirajassa. Kuinka syvällä vedenpinnan alla tunnelin keskikohta on? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

202. Kuvion mukaiseen rautalankakehikkoon, joka muodostuu ympyrästä ja kolmesta sen halkaisijasta, tarvittiin 98 cm rautalankaa. Kuinka pitkä ympyrän halkaisija on?



203. Laske prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kuinka monta prosenttia ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kahdeksankulmion piiri on ympyrän kehän pituudesta.
(Ohje: Tehtävässä ei ole annettu ympyrän säteen pituutta, joten ratkaisun tulee osoittaa, että suhde ei riipu ympyrän koosta. Merkitse ympyrän sädettä r.)

6 Ympyrän ja sektorin pinta-ala

Ympyrän pinta-ala

Ympyrän rajaaman alueen pinta-alaa on tapana kutsua ympyrän pinta-alaksi. Ympyrän pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = \pi r^2,$$

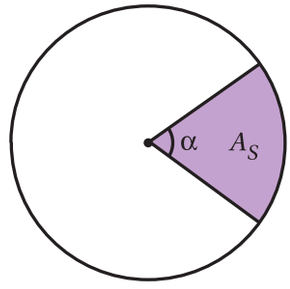
missä r on ympyrän säde.

Sektorin pinta-ala

Sektorin pinta-alan suhde ympyrän pinta-alaan on yhtä suuri kuin sektorin keskuskulman suuruuden suhde täysikulman suuruuteen $360°$.

$$\frac{A_S}{A_Y} = \frac{\alpha}{360°}$$

A_S = sektorin pinta-ala
A_Y = ympyrän pinta-ala
α = sektorin keskuskulma



Jos tunnetaan sektorin keskuskulma α ja ympyrän säde r, niin sektorin pinta-ala on

$$A_S = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2.$$

”α 360.-osaa” ympyrän pinta-alasta.

ESIMERKKI 1

Lapuan radioaseman lähetys kuuluu 60 km:n päähän. Kuinka monta asukasta kuuluvuusalueella on? Alueen väestöntiheys on 21 as/km^2.

RATKAISU

Kuuluvuusalue on ympyrä, jonka säde on 60 km.

Kuuluvuusalueen pinta-ala on

$A = \pi \cdot 60^2$ km^2.

Kuuluvuusalueen väestön suuruus on

$\pi \cdot 60^2 \cdot 21 \approx 240\,000$ (asukasta).

VASTAUS

240 000 asukasta

ESIMERKKI 2

Kuinka monta metriä köyttä tarvitaan 4 500 m^2:n suuruisen ympyrän muotoisen alueen rajaamiseen?

RATKAISU

Ympyrän pinta-ala on 4 500 km^2. On laskettava ympyrän kehän pituus. Ratkaistaan ympyrän säde r.

$\pi r^2 = 4\,500$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai yhtälöstä $r^2 = \frac{4\,500}{\pi}$.

$r \approx -37{,}847$ tai $r \approx 37{,}847$

Ympyrän säde on $r \approx 37{,}847$ m, ja ympyrän kehän pituus on

$p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 37{,}847 \approx 240$ (m).

VASTAUS

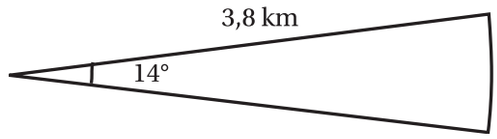
240 m

ESIMERKKI 3

Valonheitin valaisee merta 3,8 kilometrin päähän 14°:n sektorissa. Kuinka suuren merialueen valonheitin valaisee?

RATKAISU

Valaistu alue on 14°:n keskuskulman rajaama sektori ympyrässä, jonka säde on 3,8 km. Sektorin pinta-ala on



$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

Sijoitetaan $\alpha = 14°$ ja $r = 3{,}8$.

$= \frac{14°}{360°} \cdot \pi \cdot 3{,}8^2 \approx 1{,}8$ (km^2).

VASTAUS

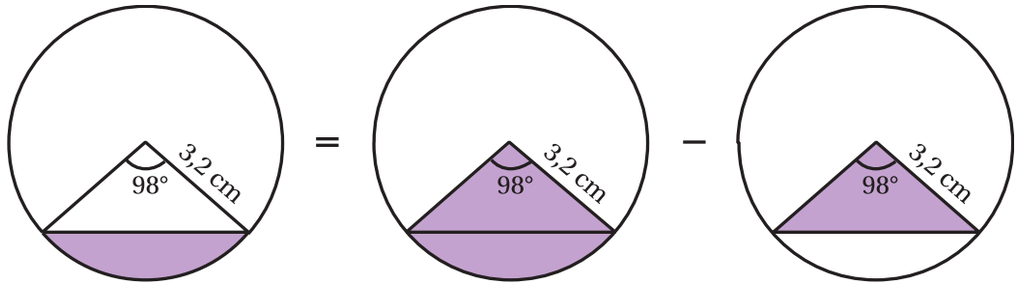
1,8 km^2

ESIMERKKI 4

Ympyrän säde on 3,2 cm. Ympyrän 98°:n keskuskulman rajaama kaari ja kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne rajaavat ympyrän segmentin. Kuinka suuri segmentin pinta-ala on?

RATKAISU

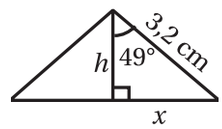
Segmentin pinta-ala saadaan, kun sektorin pinta-alasta vähennetään säteiden ja jänteen rajaaman tasakylkisen kolmion pinta-ala.



Sektorin pinta-ala on

$$A_S = \frac{98°}{360°} \cdot \pi \cdot 3{,}2^2 \approx 8{,}757 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Lasketaan tasakylkisen kolmion pinta-ala.



Puolitetaan huippukulma ja ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta tasakylkisen kolmion kannan puolikas.

$$\sin 49° = \frac{x}{3{,}2}$$

$$x \approx 2{,}415 \text{ (cm)}$$

Kannan pituus on $2x \approx 2 \cdot 2{,}415 = 4{,}830$ (cm).

Ratkaistaan kolmion korkeus.

$$\cos 49° = \frac{h}{3{,}2}$$

$$h \approx 2{,}099 \text{ (cm)}$$

Kolmion pinta-ala on

$$A_K = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h \approx \frac{1}{2} \cdot 4{,}830 \cdot 2{,}099 \approx 5{,}070 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Segmentin pinta-ala on

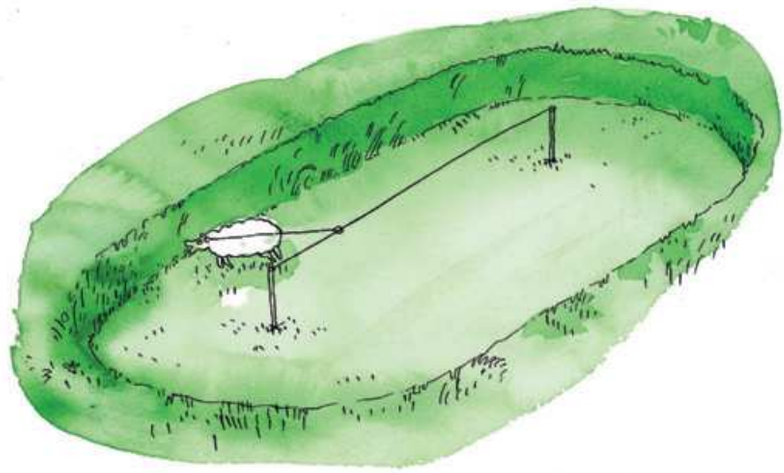
$$A = A_S - A_K \approx 8{,}757 \text{ cm}^2 - 5{,}070 \text{ cm}^2 \approx 3{,}7 \text{ cm}^2.$$

VASTAUS

$3{,}7 \text{ cm}^2$

ESIMERKKI 5

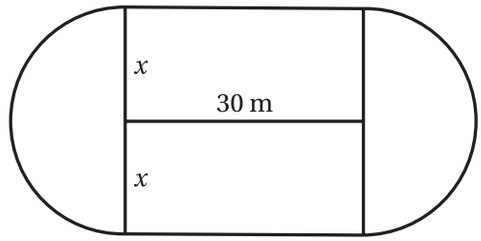
Lammas kytketään aitaamattomalla niityllä köydellä 30 m pitkään juoksulankaan. Kuinka pitkä köyden tulee olla, jotta lammas pystyisi syömään ruohoa 1 500 m^2:n alueelta?



RATKAISU

Olkoon x köyden pituus metreinä.

Alue, jolla lammas voi laiduntaa, koostuu suorakulmiosta ja kahdesta puoliympyrästä.



Puoliympyröiden yhteenlaskettu pinta ala on πx^2.
Suorakulmion pinta-ala on $30 \cdot 2x = 60x$.
Laidunalueen pinta-ala on $\pi x^2 + 60x$ (m^2).

Ratkaistaan, kuinka pitkä säteen tulee olla, jotta pinta-ala olisi 1 500 (m^2).

$\pi x^2 + 60x = 1\,500$

Ratkaisu symbolisella laskimella tai toisen asteen yhtälön ratkaisukaavalla.

$x \approx -33$ tai $x \approx 14$

Vain positiivinen juuri voi olla köyden pituus. Köyden pituuden on oltava vähintään 14 m.

VASTAUS

vähintään 14 m

HARJOITUKSIA

Sarja I

204. Kuinka suuri ympyrän pinta-ala on, jos ympyrän

a) säde on 3,5 cm **b)** halkaisija on 12,6 m?

205. Ympyrän muotoinen uima-allas, jonka halkaisija on 12,0 metriä, on ympäröity 2,0 metriä leveällä laatoituksella. Laske laatoitetun alueen pinta-ala.

206. Ympyrän muotoisen tanssilattian pinta-ala on 65 m^2. Laske tanssilattian

a) säde **b)** ympärysmitta.

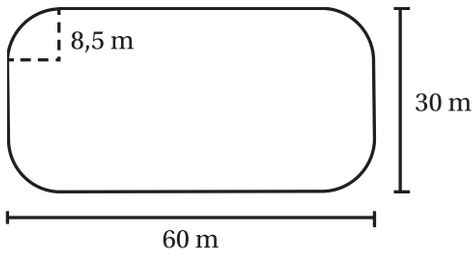
207. Köydellä, jonka pituus on 124 metriä, rajataan ympyrän muotoinen alue. Kuinka suuri alueen pinta-ala on?

208. Pyöreästä pitsasta, jonka hinta on 9,00 euroa, halutaan leikata kahden euron hintainen sektori. Kuinka suuri sektorin keskuskulman tulee olla?

209. Sadettaja kastelee nurmikenttää 12 metrin päähän sektorissa, jonka keskuskulma on 40°. Kuinka suuren alan nurmikkoa sadettaja kastelee?

210. Ympyrän säde on 5,3 m. Ympyrään on piirretty sektori, jota rajoittavan kaaren pituus on 12,3 m. Laske sektorin pinta-ala.

211. Laske jääkiekkokaukalon pinta-ala.



212. Ympyrän säde on 3,0 m. Laske 90°:n keskuskulman kaaren ja kaaren päätepisteitä yhdistävän jänteen rajaaman segmentin pinta-ala.

213. Yhden euron kolikon halkaisija on 2,325 cm. Neljä yhden euron kolikkoa sivuaa toisiaan niin, että rahojen keskipisteet muodostavat neliön. Kuinka suuri tyhjä tila jää kolikkojen keskelle?

214. Varsa kytketään köydellä joen rannassa kulkevaan 20 metrin pituiseen juoksulankaan. Kuinka pitkän köyden tulee vähintään olla, jotta varsa pystyisi laiduntamaan 1 200 m^2:n alueella?

215. Näyttelytilan lattiaa rajaavat neliön kolme sivua ja neliön ulkopuolelle neljäs sivu halkaisijana piirretty puoliympyrä. Määritä desimetrin tarkkuudella neliön sivun pituus, kun näyttelytilan

a) ympärysmitta on 72 m

b) lattiapinta-ala on 450 m^2.

216. Neliön sisään on piirretty ympyrä, joka sivuaa neliön kaikkia sivuja. Määritä ympyrän pinta-alan suhde neliön pinta-alaan. Ilmoita suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.
(Ohje: Tehtävässä ei ole annettu neliön sivun pituutta, joten ratkaisun tulee osoittaa, että suhde ei riipu neliön koosta. Merkitse neliön sivua a, määritä ympyrän säde ja muodosta ja sievennä pinta-alojen suhde.)

Sarja II

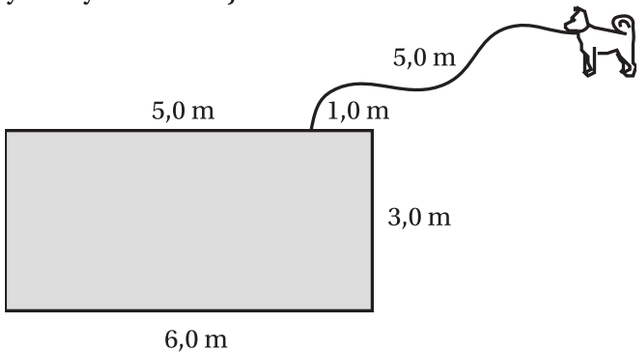
217. Vasikka on kytketty aitaamattomalla laitumella pylvääseen 8,0 metrin pituisella köydellä. Kuinka suurella alueella vasikka voi laiduntaa?

218. Pitsat, joiden halkaisijat ovat 25 cm ja 35 cm, maksavat 5 euroa ja 9,50 euroa. Kumpi pitsa on yksikköhinnoilla mitattuna edullisempi?

219. **a)** Ympyrän muotoinen alue aidattiin 35 metrillä kanaverkkoa. Mikä alueen pinta-ala on?
b) Kuinka paljon kanaverkkoa tarvitaan, kun aidataan ympyrän muotoinen 150 m^2:n suuruinen alue?

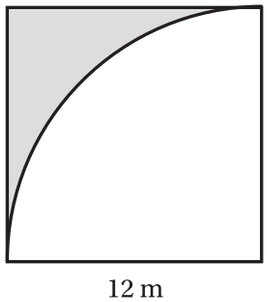
220. Ammunnoissa vaarallinen alue ulottuu 12 kilometrin päähän saaresta sektorissa, jota rajoittavat suunnat 12° etelästä länteen ja 17° etelästä itään. Laske vaarallisen alueen pinta-ala.

221. Kuinka suurella alueella vajan seinään kytketty koira voi jaloitella?

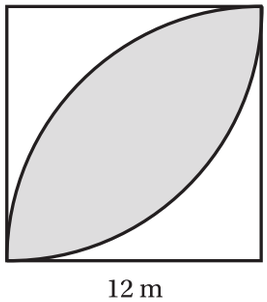


222. Laske varjostetun alueen pinta-ala. Ympyröiden keskipisteet ovat neliön kärjissä.

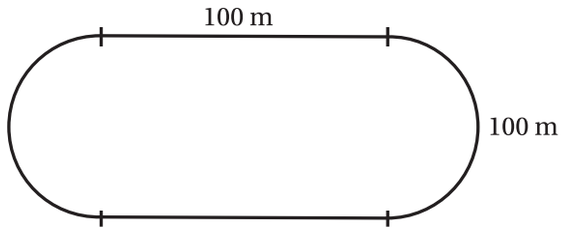
a)



b)

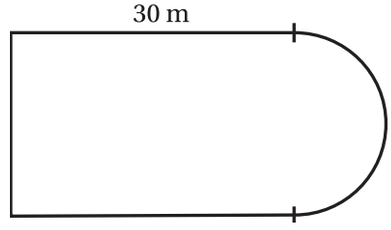


223. Laske urheilukentän pinta-ala. Kentän kaarteet ovat puoliympyröitä.



224. Ympyrän säde on 4,5 m. Ympyrän 80°:n keskuskulman kaari ja kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne rajaavat ympyrän segmentin. Laske segmentin pinta-ala.

225. Konserttisalin lattia on 30,0 m pitkä suorakulmio ja sen toiseen päähän liittyvä puoliympyrä. Kuinka leveä salin tulee olla, jotta lattiapinta-ala olisi 800 m^2? Anna vastaus desimetrin tarkkuudella.



226. Laske prosentin kymmenesosan tarkkuudella, kuinka monta prosenttia ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kahdeksankulmion pinta-ala on ympyrän pinta-alasta.
(Ohje: Tehtävässä ei ole annettu ympyrän säteen pituutta, joten ratkaisun tulee osoittaa, että suhde ei riipu ympyrän koosta. Merkitse ympyrän sädettä r.)

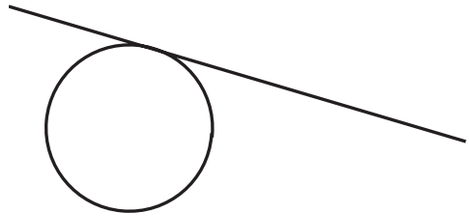
Ympyrän tangentti

ONGELMA

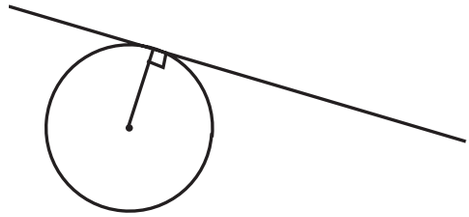
Palloa, jonka halkaisija on 30 cm, katsotaan 50 cm:n etäisyydeltä pallon pinnasta. Piirrä tilanteesta oikeissa mittasuhteissa sivukuva, josta voidaan mitata, kuinka suuressa kulmassa katsoja näkee pallon. Mittaa kulma.

Ympyrän tangentti

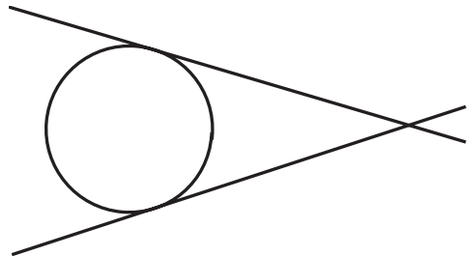
Suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä, on ympyrän *tangentti*. Tangentti *sivuaa* ympyrää.



Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan. Tangentin etäisyys keskipisteestä on säteen suuruinen.



Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia.

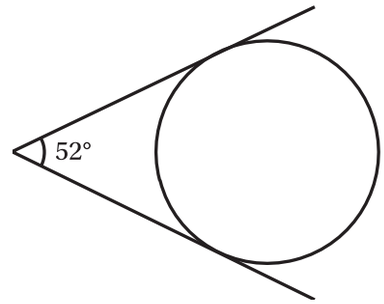


ESIMERKKI 1

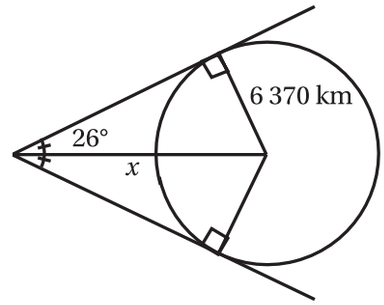
Maapallo näkyy miehitetystä avaruusaluksesta 52°:n kulmassa. Mikä on avaruusaluksen etäisyys Maasta? Maapallon säde on 6 370 km.

RATKAISU

Kulma, jossa maapallo näkyy, on avaruusaluksesta maapallon poikkileikkausympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma. Ympyrän keskipiste on maapallon keskipiste ja säde on maapallon säde.



Kun kuvioon täydennetään ympyrän keskipisteen kautta kulkeva suora ja sivuamispisteisiin piirretyt säteet, muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota. Kuvio on symmetrinen keskipisteen kautta kulkevan suoran suhteen, joten suora puolittaa tangenttien välisen kulman.



Suorakulmaisesta kolmiosta ratkaistaan aluksen etäisyys maapallon keskipisteestä.

$$\sin 26° = \frac{6\ 370}{x}$$

$$x \approx 14\ 530 \text{ (km)}$$

Aluksen etäisyys Maasta on

$$14\ 530 \text{ km} - 6\ 370 \text{ km} = 8\ 160 \text{ km} \approx 8\ 200 \text{ km}.$$

VASTAUS

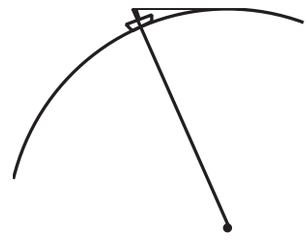
8 200 km

ESIMERKKI 2

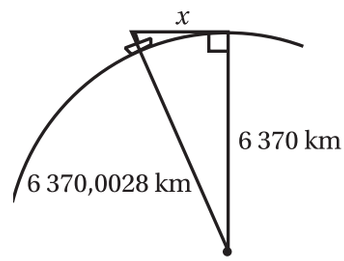
Kuinka kauas merelle voi nähdä veneen kannella seisova henkilö, jonka silmät ovat 2,80 metrin korkeudella veden pinnasta? Maapallon säde on 6 370 km.

RATKAISU

Näkökentän etäisimmästä kohdasta saapuvat valonsäteet kulkevat pitkin maapallon poikkileikkausympyrän tangenttia. Ympyrän keskipiste on maapallon keskipiste ja säde on maapallon säde.



Kuviossa x on näkökentän etäisimmän kohdan etäisyys katsojan silmistä.* Ratkaistaan etäisyys x Pythagoraan lauseella.



$$x^2 + 6\,370^2 = 6\,370{,}0028^2$$

$$x \approx -6{,}0 \text{ tai } x \approx 6{,}0$$

Henkilö näkee 6,0 km:n päähän.

VASTAUS

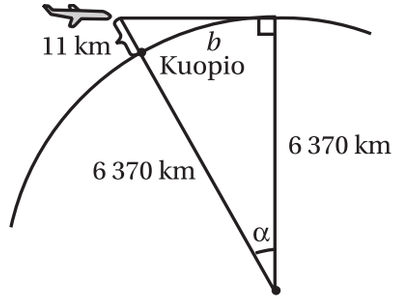
6,0 km:n päähän

ESIMERKKI 3

Lentokone lentää 11 kilometrin korkeudessa Kuopion yläpuolella. Voidaanko koneen ikkunasta kirkkaalla ilmalla nähdä Suomenlahti? Kuopion lyhin etäisyys Suomenlahdesta on noin 300 km. Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

RATKAISU

Lasketaan, kuinka etäällä Kuopiosta on etäisin paikka, joka lentokoneesta voidaan nähdä. Etäisyys Kuopiosta on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus b. Keskuskulma α ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta.



$$\cos\alpha = \frac{6\,370}{6\,370 + 11}$$

$$\cos\alpha = \frac{6\,370}{6\,381}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6\,370}{6\,381}\right) \approx 3{,}365°$$

Kaaren pituus on $b = \dfrac{3{,}365°}{360°} \cdot 40\,000 \approx 370$ (km).

Näkökenttä ulottuu 370 kilometrin päähän Kuopiosta ja siis myös Suomenlahdelle 300 kilometrin päähän.

VASTAUS

Voidaan nähdä.

---

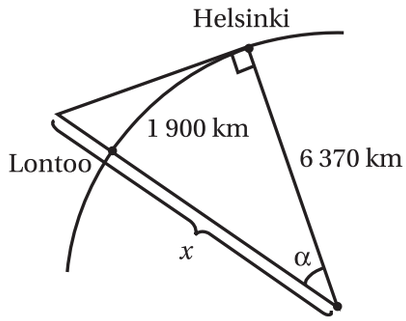
* Etäisyys maapallon pinnalla on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus. Koska katsojan silmät ovat lähellä maapallon pintaa, näkökentän etäisimmän kohdan viivasuora etäisyys katsojan silmistä poikkeaa hyvin vähän etäisimpään kohtaan kulkevan kaaren pituudesta.

ESIMERKKI 4

Kuinka korkealla Lontoon yläpuolella olevan viestintäsatelliitin tulee vähintään olla, jotta satelliitin lähetys tavoittaisi Helsingin? Lontoon ja Helsingin etäisyys on 1 900 km. Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

RATKAISU

Lasketaan ensin, kuinka etäällä satelliitin tulisi olla maapallon keskipisteestä, jotta lähetysalue ulottuisi Helsinkiin.



Helsingin ja Lontoon etäisyys 1 900 km on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus.

Ratkaistaan keskuskulma α. Keskuskulman α suhde täysikulmaan 360° on yhtä suuri kuin kaaren pituuden 1 900 km suhde ympyrän kehän pituuteen 40 000 km.

$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{1\,900}{40\,000}$$

$$\alpha = 17{,}1°$$

Ratkaistaan etäisyys x.

$$\cos 17{,}1° = \frac{6\,370}{x}$$

$$x \approx 6\,660 \text{ (km)}$$

Korkeus saadaan vähentämällä maapallon säde.

$$6\,660 \text{ km} - 6\,370 \text{ km} = 290 \text{ km}$$

VASTAUS

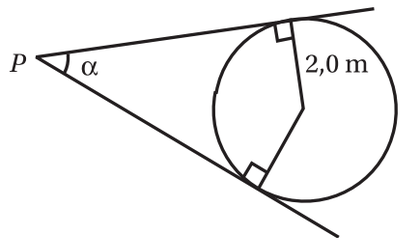
vähintään 290 km:n korkeudella

HARJOITUKSIA

Monissa tehtävissä tarvitaan maapallon ympärysmittaa ja sädettä. Maapallon ympärysmitta on kolmen numeron tarkkuudella 40 000 km ja säde $\frac{40\ 000\ \text{km}}{2\pi} \approx 6\,370$ km.

Sarja I

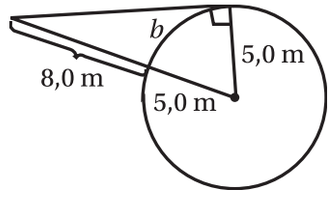
227. Pisteen P etäisyys ympyrän keskipisteestä on 6,0 m. Kuinka suuri on pisteestä P ympyrälle piirrettyjen tangenttien välinen kulma α?



228. Maapallo näkyy miehitetystä avaruusaluksesta 72°:n kulmassa. Mikä on aluksen etäisyys Maasta?

229. Kuinka kauas merelle voi nähdä Helsingin Olympiastadionin tornista 76 metrin korkeudelta meren pinnasta?

230. Laske kaaren pituus b.



231. Kuinka etäälle Helsingistä ulottuu Helsingin yläpuolella 450 km:n korkeudessa olevan viestintäsatelliitin lähetysalue?

232. Merenkurkun molemmille puolille paikkoihin, joiden välinen etäisyys on 110 kilometriä, päätetään rakentaa merenpinnasta yhtä korkealle nousevat linkkitornit. Kuinka korkeiksi tornit tulee rakentaa, jotta lähetysaallot kulkisivat esteettä tornista toiseen?

233. Sojuz-avaruusasema kulkee paikkakunnan yli taivaanlaen kautta 900 km:n korkeudella. Kuinka kauan avaruusasema on näkyvillä horisontin yläpuolella? Avaruusaseman kiertoaika maapallon ympäri on 95 minuuttia ja aseman kiertorata voidaan olettaa ympyräksi.

234. Pullon ympärysmitta on 26,4 cm. Pulloon on liimattu 12,3 cm:n levyinen etiketti. Kuinka etäältä silmästä pullon tulee vähintään olla, jotta yhdellä silmällä katsottaessa etiketti näkyisi kokonaan?

235. Pikkupalaneetta näkyy avaruusaluksesta 24°:n kulmassa. Tutkasta nähdään, että planeetan etäisyys aluksesta on 320 km. Mikä pikkuplaneetan läpimitta on?

Sarja II

236. Ympyrä, jonka säde on 8,0 cm, näkyy pisteestä P 38°:n kulmassa. Laske pisteen P etäisyys ympyrän
a) keskipisteestä **b)** kehästä.

237. Missä kulmassa maapallo näkyy avaruusaluksesta, joka on matkalla Kuuhun 15 000 kilometrin etäisyydellä Maasta?

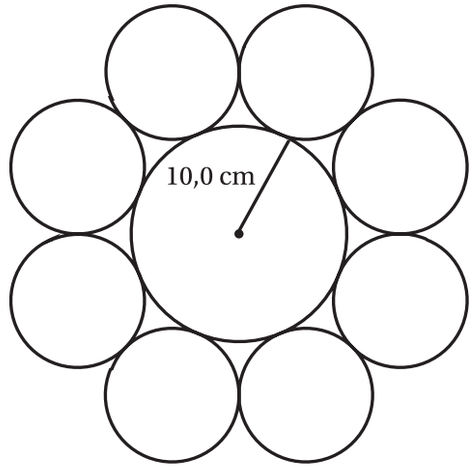
238. Kuinka kauas merelle voi nähdä rannalla seisova henkilö, jonka silmät ovat 170 cm:n korkeudella meren pinnasta?

239. Lentokone on Kajaanin yläpuolella 1,7 kilometrin korkeudella. Voidaanko lentokoneesta kirkkaalla ilmalla nähdä Pohjanlahti? Pohjanlahden lyhin etäisyys Kajaanista on 130 km.

240. Manner-Suomen suurin pituus Hangosta Utsjoelle on 1 160 kilometriä. Kuinka korkealle pitäisi vähintään nousta Manner-Suomen keskikohdan yläpuolelle, jotta voisi nähdä koko Manner-Suomen?

241. Kuu näkyy Maasta 0,52°:n kulmassa.
a) Laske matka Maan pinnalta Kuun pinnalle. Kuun säde on 1 740 km.
b) Tennispallon halkaisija on 6,6 cm. Miltä etäisyydeltä katsottuna tennispallo näkyy Kuun kokoisena?

242. Koristekuvion ympyrä, jonka säde on 10,0 cm, on ympäröity kahdeksalla keskenään samankokoisella ympyrällä, joista jokainen sivuaa kahta viereistä ympyrää ja keskellä olevaa ympyrää. Kuinka suuri ympäröivien ympyröiden säde on?



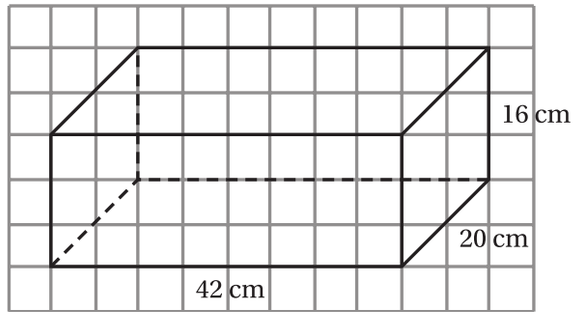
12 Suorakulmainen särmiö

ESIMERKKI 1

Laatikon pohjasärmien pituudet ovat 42 cm ja 20 cm. Laatikon korkeus on 16 cm. Piirrä kuva laatikosta ja laske laatikon tilavuus.

RATKAISU

Suorakulmainen särmiö piirretään yleensä *kavaljeeriperspektiivissä*. Edessä ja takana olevat tahkot piirretään suorakulmioina ruudukkoa hyödyntäen likimain oikeissa mittasuhteissa. Syvyyssuunnassa kulkeva särmä piirretään ruudukkoa hyödyntäen 45°:n kulmassa, ja sen pituus kuvassa on noin puolet todellista vastaavasta pituudesta.



Laatikon tilavuus on pituuden, leveyden ja korkeuden tulo.

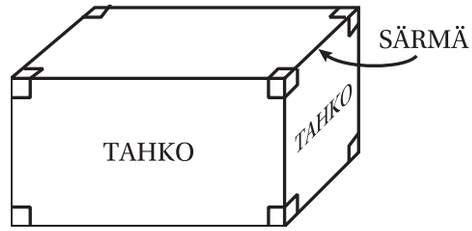
$V = 42\text{ cm} \cdot 20\text{ cm} \cdot 16\text{ cm} \approx 13\,000\text{ cm}^3 = 13\text{ dm}^3$

VASTAUS

13 dm^3

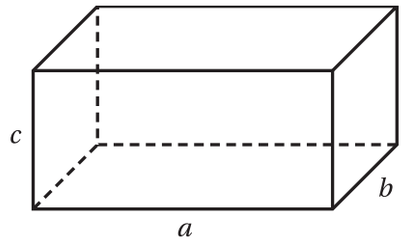
Suorakulmainen särmiö

Suorakulmaisen särmiön *särmät* ja *tahkot* ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa.



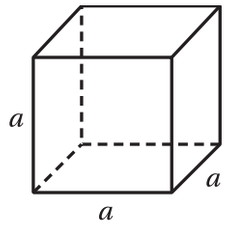
Suorakulmaisen särmiön tilavuus on pituuden, leveyden ja korkeuden tulo.

$V = abc$



Suorakulmainen särmiö, jonka kaikki särmät ovat yhtä pitkät, on *kuutio*. Jos särmien pituus on a, niin kuution tilavuus on $V = a \cdot a \cdot a$ eli

$V = a^3$.

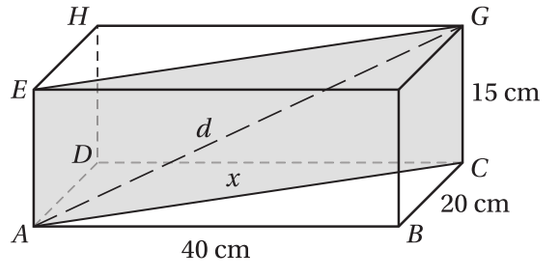


ESIMERKKI 2

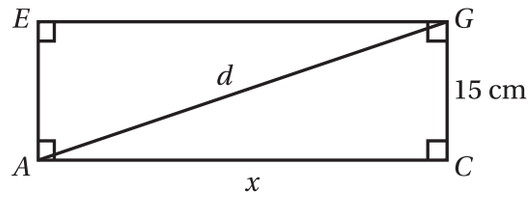
Laatikon pohjasärmien pituudet ovat 40 cm ja 20 cm. Laatikon korkeus on 15 cm. Mahtuuko 48 cm:n pituinen suora sauva laatikkoon?

RATKAISU

Kaikkein pisin laatikkoon mahtuvan sauva ulottuu särmiön kärjestä vastakkaiseen kärkeen. Vastakkaisia kärkiä yhdistävä jana on särmiön *avaruuslävistäjä*.



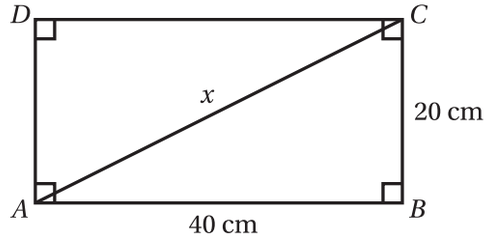
Avaruuslävistäjän AG pituuden laskemiseksi särmiö leikataan tasolla, joka kulkee vastakkaisten särmien AE ja CG kautta.



Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka sivut ovat pohjatahkon lävistäjä x ja särmiön korkeus. Avaruuslävistäjä d on suorakulmion lävistäjä.

Pythagoraan lauseen nojalla $d^2 = x^2 + 15^2$.

Ensin on siis laskettava pohjatahkon lävistäjän x neliö x^2.



Pythagoraan lauseen nojalla

$x^2 = 40^2 + 20^2$.

Lausekkeeseen $d^2 = x^2 + 15^2$ sijoitetaan $x^2 = 40^2 + 20^2$.

$d^2 = 40^2 + 20^2 + 15^2$

Voidaan ratkaista myös symbolisella laskimella.

$d^2 = 2\,225$

$d = \sqrt{2\,225} \approx 47{,}2$ tai $d = -\sqrt{2\,225} \approx -47{,}2$

Avaruuslävistäjän pituus on $47{,}2$ cm. Koska sauvan pituus 48 cm on avaruuslävistäjän pituutta suurempi, sauva ei mahdu laatikkoon.

VASTAUS

Ei mahdu.

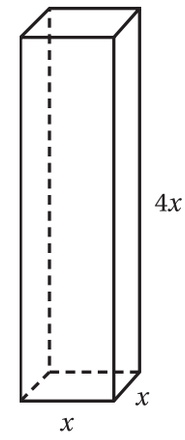
ESIMERKKI 3

Litran vetoinen pakkaus on muodoltaan suorakulmainen särmiö, jonka pohja on neliö ja jonka korkeus on neljä kertaa niin suuri kuin pohjasärmien pituus. Määritä pakkauksen mitat millimetrin tarkkuudella.

RATKAISU

Mittayksikkö litra ilmaistaan kuutiomittana: $1\,\text{l} = 1\,\text{dm}^3 = 1\,000\,\text{cm}^3$.

Merkitään pohjasärmien pituutta senttimetreinä x.
Tällöin särmiön korkeus on $4x$.



Särmiön tilavuus kuutiosenttimetreinä on $x \cdot x \cdot 4x$.
Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$x \cdot x \cdot 4x = 1\,000$

$4x^3 = 1\,000$

$x \approx 6{,}300\ (\text{cm})$ — Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$4x^3 = 1\,000 \quad | : 4$ — Ratkaistaan ensin x^3.

$x^3 = 250$ — Yhtälön ratkaisu on luvun 250 *kuutiojuuri* $\sqrt[3]{250}$.

$x = \sqrt[3]{250} \approx 6{,}300\ (\text{cm})$.

Siis särmiön pohjasärmien pituus millimetrin tarkkuudella on 6,3 cm.
Särmiön korkeus on $4x \approx 4 \cdot 6{,}300\ \text{cm} \approx 25{,}2\ \text{cm}$.

VASTAUS

pohjasärmät 6,3 cm, korkeus 25,2 cm

HARJOITUKSIA

Sarja I

243. Entinen teollisuusrakennus (nykyinen salibandyhalli) on muodoltaan suorakulmainen särmiö. Rakennuksen pituus on 48 m, leveys 31 m ja korkeus 14 m. Piirrä kuva rakennuksesta kavaljeeriperspektiivissä ja laske rakennuksen tilavuus.

244. Kaloja kuljetetaan laatikossa, jonka ulkomitat ovat 80 cm, 60 cm ja 40 cm. Laatikko on valmistettu 8,0 cm:n paksuisesta styroksilevystä.
a) Laske laatikon vetoisuus litroina.
b) Kuinka paljon tyhjä laatikko painaa? Yksi kuutiodesimetri styroksia painaa 21 g.

245. Pahvista tehty suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko on mitoiltaan 75 cm × 60 cm × 40 cm. Laatikon särmät vahvistetaan metallinauhalla. Kuinka paljon nauhaa tarvitaan?

246. Neulontatarvikkeita säilytetään suorakulmaisen särmiön muotoisessa laatikossa, jonka pohjasärmien pituudet ovat 11,5 cm ja 9,0 cm ja korkeus 6,3 cm. Kuinka pitkä sukkapuikko mahtuu
a) laatikon pohjalle
b) laatikkoon?

247. Suorakulmaisen särmiön muotoisen laatikon leveyden, pituuden ja korkeuden suhde on 1 : 2 : 3. Laatikon vetoisuus on 12,0 litraa. Määritä laatikon mitat.

248. Kissa kulki 20 metriä suoraan, kääntyi 90°, kulki 15 metriä suoraan ja kiipesi puuhun 10 metrin korkeuteen. Mikä on kissan lopullisen sijaintipaikan etäisyys lähtöpaikasta?

249. Kuutio, jonka särmien pituus on 4,0 cm, leikataan tasolla, joka kulkee kahta vastakkaista särmää pitkin.
a) Määritä leikkauskuvion sivujen pituudet ja piirrä leikkauskuvio oikeassa koossa.
b) Laske leikkauskuvion avulla kuution kahden avaruuslävistäjän välisen terävän kulman suuruus.

250. Jään läpi halutaan nostaa kuution muotoinen kotelo, jonka särmien pituus on 45 cm. Kuinka suuri pyöreä reikä jäähän tulee kairata, jos köysi on kiinnitetty
a) tahkon keskipisteeseen
b) särmän keskipisteeseen?

Sarja II

251. Huoneen pituus on 4,5 m, leveys 3,2 m ja korkeus 3,0 m. Peruskorjauksen yhteydessä seiniin lisättiin sisäpuolelle 15 cm:n paksuinen eristekerros ja kattoa laskettiin 40 cm. Laske huoneen tilavuus ennen ja jälkeen peruskorjauksen.

252. Kuution muotoiselle laatikolle tehdään kehikko leikkaamalla ja taivuttamalla särmät 160 cm pitkästä rautalangasta. Laske laatikon
a) särmien pituus
b) tilavuus kuutiodesimetreinä
c) kokonaispinta-ala neliödesimetreinä.

253. Mikä tulee ovessa olevan pyöreän aukon läpimitan vähintään olla, jotta aukosta mahtuisi läpi
a) kuutio, jonka särmien pituus on 8,0 cm
b) suorakulmaisen särmiön muotoinen laatikko, jonka pituus on 12,0 cm, leveys 8,0 cm ja korkeus 6,0 cm?

254. Kuution särmän pituus on 5,0 cm. Kuinka pitkä kuution avaruuslävistäjä on?

255. Huone, jonka pituus on 6,2 m, leveys 4,5 m ja korkeus 2,6 m, on muodoltaan suorakulmainen särmiö. Huoneen kattonurkassa on kärpänen. Kuinka pitkä lentomatka kärpäsellä on huoneen poikki vastakkaiseen lattianurkkaan?

256. Torimyynnissä käytetään mitta-astiana niin sanottua pientä kappaa. Pieni kappa on muodoltaan kuutio, ja sen vetoisuus on 2 litraa. Laske millimetrin tarkkuudella pienen kapan särmän pituus.

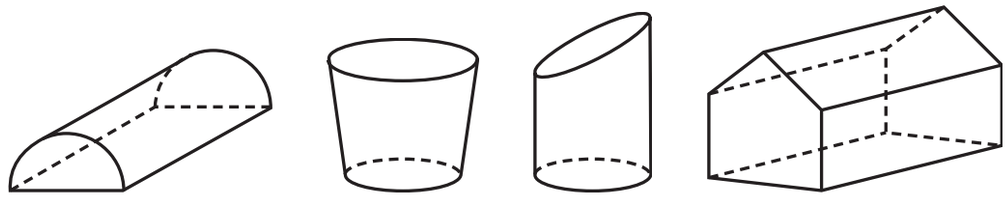
257. Suorakulmaisen särmiön muotoisen kahden desilitran mehupakkauksen leveyden, pituuden ja korkeuden suhde on 2 : 3 : 4. Määritä pakkauksen mitat millimetrin tarkkuudella.

258. Suorakulmaisen särmiön muotoisen luokkahuoneen leveys on 8,0 m, pituus 10,0 m ja korkeus 4,0 m. Huone leikataan tasolla, joka kulkee pitkin 8,0 m:n pituisen päätyseinän lattiasärmää ja vastakkaista kattosärmää.
a) Määritä leikkauskuvion sivujen pituudet ja piirrä leikkauskuvio oikeissa mittasuhteissa. Laske leikkauskuvion avulla
b) luokkahuoneen avaruuslävistäjän ja samasta lattianurkasta lähtevän päätyseinän lattialistan välinen kulma
c) luokkahuoneen avaruuslävistäjän ja samasta lattianurkasta lähtevän sivuseinän lävistäjän välinen kulma.

Lieriö

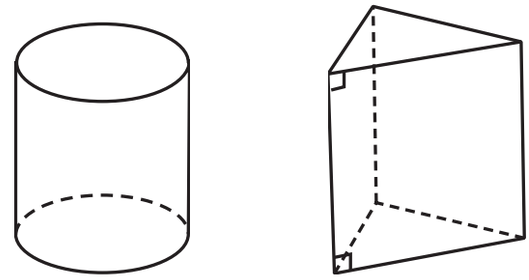
ONGELMA 1

Mitkä kappaleista ovat lieriöitä? Jos kappale on lieriö, niin millainen kuvio sen pohja on?



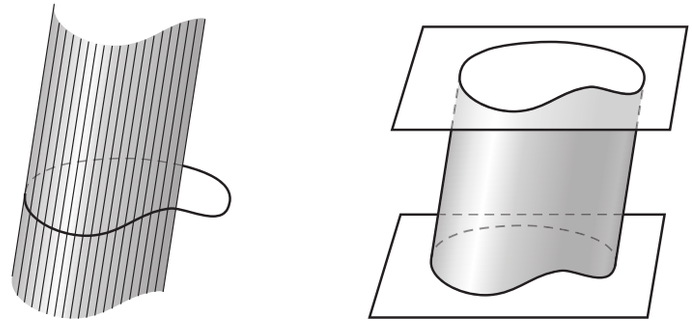
ONGELMA 2

Kuvion lieriöiden vaippa leikataan auki pohjaa vastaan kohtisuoraan ja levitetään tasoon. Millainen kuvio muodostuu?

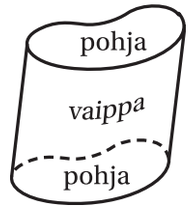


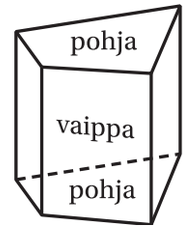
Lieriö

Kun suora liikkuu pitkin umpinaista viivaa, joka ei leikkaa itseään, ja suora säilyttää koko ajan suuntansa, muodostuu *lieriöpinta*. Kun lieriöpinta leikataan kahdella yhdensuuntaisella tasolla, syntyy *lieriö*.

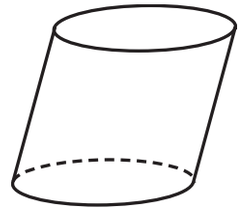


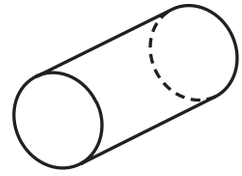
Lieriöllä on *vaippa* ja kaksi yhtenevää (samanlaista) ja yhdensuuntaista *pohjaa*.



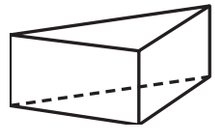


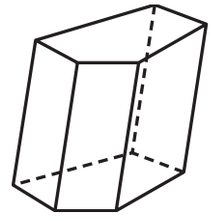
Ympyrälieriön pohja on ympyrä.



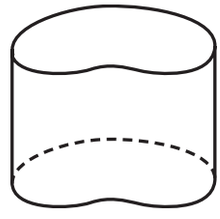


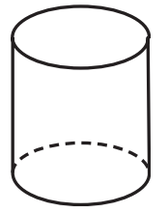
Lieriöstä, jonka pohja on monikulmio, käytetään myös nimitystä *särmiö*.

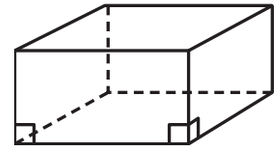




Lieriö, jonka vaippa on kohtisuorassa pohjaa vastaan, on *suora lieriö*.





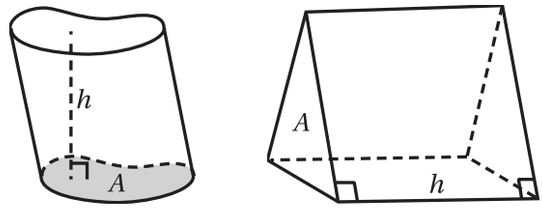


Lieriön tilavuus

Lieriön tilavuus on lieriön pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo.

$$V = A \cdot h$$

A = lieriön pohjan pinta-ala
h = lieriön korkeus



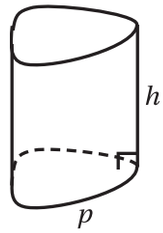
Lieriön tilavuuden kaavaa ei tässä kurssissa perustella.

Suoran lieriön vaipan pinta-ala

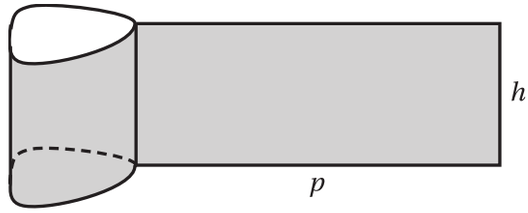
Suoran lieriön vaipan pinta-ala on lieriön pohjan piirin ja lieriön korkeuden tulo.

$$A = ph$$

p = lieriön pohjan piiri
h = lieriön korkeus



Perustelu. Jos suoran lieriön vaippa leikataan auki pohjaa vastaan kohtisuoraan ja levitetään tasoon, vaipasta muodostuu suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat lieriön pohjan piiri p ja lieriön korkeus h. Suorakulmion pinta-ala on $A = ph$.



ESIMERKKI 1

Tasakattoisen huoneen korkeus on 3,45 m. Huoneen lattiapinta-ala on 28,3 m^2, ja huoneen katon kiertää 35,8 m pitkä koristelista. Laske huoneen tilavuus ja seinäpinta-ala.

RATKAISU

Lattian muodosta riippumatta huonetila on suora lieriö.

Tilavuus on pohjan pinta-alan ja korkeuden tulo.

$V = A \cdot h$ Sijoitetaan $A = 28{,}3\ \text{m}^2$ ja $h = 3{,}45$ m.

$= 28{,}3\ \text{m}^2 \cdot 3{,}45\ \text{m} \approx 97{,}6\ \text{m}^3$

Seinäpinta-ala on pohjan piirin ja korkeuden tulo.

$A = ph$ Sijoitetaan $p = 35{,}8$ m ja $h = 3{,}45$ m.

$= 35{,}8\ \text{m} \cdot 3{,}45\ \text{m} \approx 124\ \text{m}^2$

VASTAUS

tilavuus 97,6 m^3, seinäpinta-ala 124 m^2

ESIMERKKI 2

Tasaiselle piha-alueelle, jonka pinta-ala on 470 m^2, on ajettu kahdeksan autokuormaa multaa, yhteensä 88 m^3. Kuinka paksu multakerros pihaan saadaan, jos multa levitetään tasaisesti?

RATKAISU

Piha-alueen muodosta riippumatta tasapaksu multakerros muodostaa lieriön, jonka tilavuus on 88 m^3 ja pohjan pinta-ala 470 m^2.

Ratkaistaan lieriön korkeus.

$A \cdot h = V \quad | : A$

$h = \frac{V}{A}$ Sijoitetaan $V = 88\ (\text{m}^3)$ ja $A = 470\ (\text{m}^2)$.

$= \frac{88}{470} \approx 0{,}19\ (\text{m})$

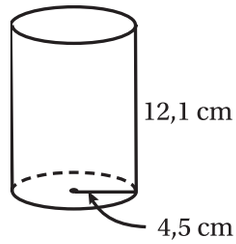
VASTAUS

19 cm

ESIMERKKI 3

Suoran ympyrälieriön pohjan säde on 4,5 cm ja korkeus 12,1 cm. Kuinka suuri on lieriön

a) tilavuus **b)** kokonaispinta-ala?



RATKAISU

a) Lieriön tilavuus on

$V = A \cdot h$ Sijoitetaan pohjan pinta-ala $A = \pi r^2$, missä r on pohjan säde.

$= \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4{,}5^2 \cdot 12{,}1 \approx 770 \text{ (cm}^3\text{)}.$

b) Lieriön *kokonaispinta-ala* on vaipan ja molempien pohjien yhteenlaskettu pinta-ala.

Vaipan pinta-ala on

$A_V = ph$ Sijoitetaan pohjan piiri $p = 2\pi r$, missä r on pohjan säde.

$= 2\pi r \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 4{,}5 \cdot 12{,}1$

$\approx 342{,}12 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Pohjan pinta-ala on

$A_P = \pi r^2 = \pi \cdot 4{,}5^2 \approx 63{,}62 \text{ (cm}^2\text{)}.$

Kokonaispinta-ala on

$A = A_V + 2 \cdot A_P$ Vaipan ja molempien pohjien yhteenlaskettu pinta-ala.

$\approx 342{,}12 + 2 \cdot 63{,}62 \approx 470 \text{ (cm}^2\text{)}.$

VASTAUS

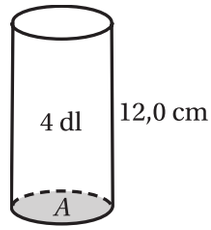
a) 770 cm^3 **b)** 470 cm^2

ESIMERKKI 4

On valmistettava 4 dl:n vetoinen suoran ympyrälieriön muotoinen säilyketölkki. Tölkin korkeudeksi valitaan 12,0 cm. Laske lieriön pohjan halkaisijan pituus millimetrin tarkkuudella.

RATKAISU

Ilmaistaan lieriön tilavuus 4 desilitraa kuutiosenttimetreinä:
$4\text{ dl} = 0{,}4\text{ l} = 0{,}4\text{ dm}^3 = 400\text{ cm}^3$.



Määritetään lieriön pohjan pinta-ala A ja edelleen pohjan säde r.

$A \cdot h = V \qquad | : h$

$A = \dfrac{V}{h}$

$= \dfrac{400}{12{,}0} \approx 33{,}333$

Sijoitetaan $V = 400\ (\text{cm}^3)$ ja $h = 12{,}0\ (\text{cm})$.

Pohjan pinta-ala on $\dfrac{400}{12{,}0} \approx 33{,}333\ (\text{cm}^2)$. Ratkaistaan pohjaympyrän säde r.

$\pi r^2 = \dfrac{400}{12{,}0}$

$r \approx -3{,}2573$ tai $r = 3{,}2573$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

$\pi r^2 = 33{,}333 \qquad | : \pi$

$r^2 = \dfrac{33{,}333}{\pi}$

$r = \sqrt{\dfrac{33{,}333}{\pi}} \approx 3{,}2573$ tai $r = -\sqrt{\dfrac{33{,}333}{\pi}} \approx -3{,}2573\ (\text{cm})$

Pohjan säde on $r \approx 3{,}2573$ cm ja halkaisija $2r \approx 2 \cdot 3{,}2573\text{ cm} \approx 6{,}5$ cm.

VASTAUS

6,5 cm

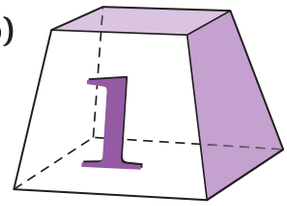
HARJOITUKSIA

Sarja I

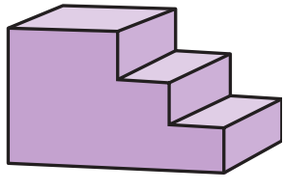
259. Onko kappale lieriö? Jos kappale on lieriö, niin millainen kuvio lieriön pohja on?

a)

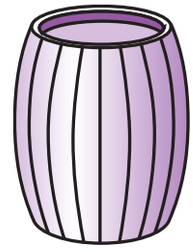
b)



c)

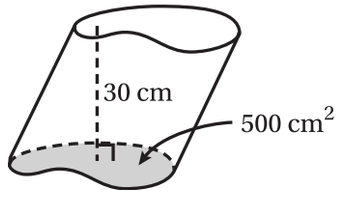


d)

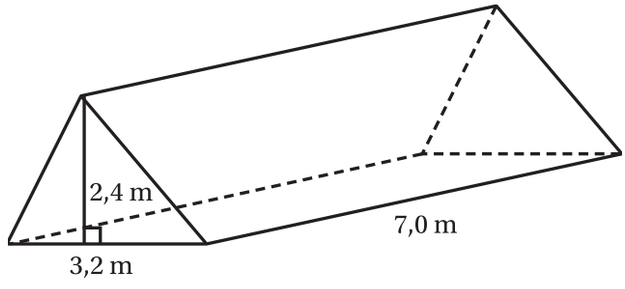


260. Laske lieriön tilavuus.

a)



b)



261. Tasakattoisen omakotitalon katon pinta-ala on $120\ \text{m}^2$. Ukkoskuuron aikana vettä satoi 4,1 mm. Kuinka monta litraa vettä talon katolle satoi?

262. Grönlannin jäätiköiden tilavuus on 3 miljoonaa kuutiokilometriä. Jos jäätiköt sulavat, niin kuinka paljon maapallon merien pinta nousee? Maapallon merien pinta-ala on 381 miljoonaa neliökilometriä. Kun jää sulaa, sulamisveden tilavuus on 90 % jään tilavuudesta.

263. Makeispakkaus on muodoltaan kuusisivuinen särmiö, jonka kaikkien pohjasärmien pituus on 3,0 cm. Pakkauksen korkeus on 15,0 cm. Pakkauksen vaippa on pahvia. Kuinka paljon pahvia yhteen pakkaukseen tarvitaan?

264. Suoran ympyrälieriön pohjan säde on 4,1 cm ja korkeus 12,3 cm. Kuinka suuri on lieriön

a) tilavuus
b) vaipan pinta-ala
c) kokonaispinta-ala?

265. Kattilaan kaadettiin 2,0 litraa vettä. Tällöin vedenpinnan korkeus astiassa kohosi 13 cm. Kuinka suuri kattilan pohjan halkaisija on?

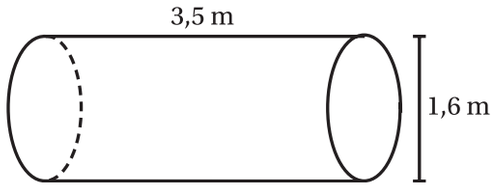
266. Juomia annostellaan suoran ympyrälieriön muotoisella mitta-astialla, jonka pohjan halkaisija on 5,0 cm. Astiaan on kaiverrettava viiva 12 senttilitran kohdalle. Määritä viivan paikka millimetrin tarkkuudella.

267. Pellistä valmistetaan 10,0 cm:n korkuisia suoran ympyrälieriön muotoisia viiden desilitran vetoisia säilyketölkkejä. Paljonko peltiä tarvitaan yhteen tölkkiin?

268. Suoran ympyrälieriön muotoiseen mittalasiin, jonka sisähalkaisija on 2,0 cm, kerääntyy sadevesi suppilosta, jonka ympyrän muotoisen suuaukon halkaisija on 34 cm. Vuorokauden aikana mittalasiin kertyi 18,5 cm korkea vesikerros. Kuinka monta millimetriä vettä vuorokauden aikana satoi?

269. Puistoa rakennettaessa kaivetaan 60 m pitkä oja, jonka tasainen pohja on 10 cm leveä ja 80 cm:n syvyydellä maanpinnasta ja jonka sivuseinämät ovat 40°:n kulmassa vaakatasoon nähden. Kuinka monta kuutiometriä maata ojaa kaivettaessa poistetaan?

270. Öljysäiliö on vaakasuorassa asennossa makaava suora ympyrälieriö. Säiliön pituus on 3,5 m ja korkeus 1,6 m. Mittatikulla mitataan säiliössä olevan öljykerroksen syvyydeksi 50 cm. Kuinka monta litraa öljyä säiliössä on?



Sarja II

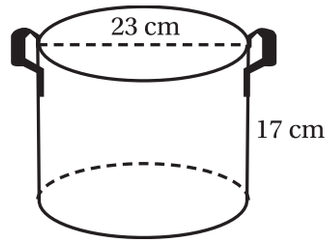
271. Maantietä rakennettaessa päällysteen alle levitetään 15 senttimetrin kerros kivimursketta. Kuinka monta 12 kuutiometrin autokuormaa mursketta tarvitaan, kun rakennetaan 50 kilometriä moottoritietä, jonka kaistojen yhteenlaskettu leveys on 40 metriä?

272. Huoneen pituus on 6,2 m, leveys 4,5 m ja korkeus 3,2 m. Peruskorjauksen yhteydessä huoneen seiniin lisättiin sisäpuolelle 20 cm:n paksuinen eristekerros ja huoneen kattoa laskettiin 50 cm. Mikä huoneen seinäpinta-ala oli
a) ennen peruskorjausta
b) peruskorjauksen jälkeen?

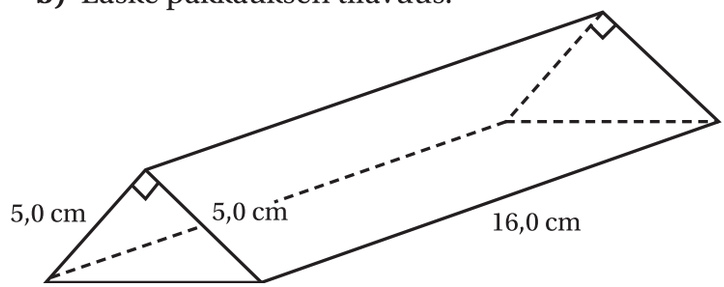
273. Astianpesukoneen vesiletkun haljettua lattialle valuu vettä 18 litraa minuutissa 8 tunnin ajan. Asunnon lattiapinta-ala on 85 m^2. Kuinka paksu vesikerros lattialle kertyy?

274. Pihaan tuotu 12 m^3:n multakuorma levitetään tasaiseksi 8 cm:n paksuiseksi kerrokseksi. Kuinka suurelle alueelle multa riittää?

275. **a)** Laske kattilan tilavuus.



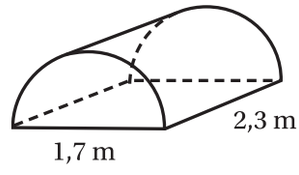
b) Laske pakkauksen tilavuus.



276. Likipitäen tasapaksun tuoreen koivupölkyn korkeus on 1,31 m ja läpimitta 72 cm.
a) Kuinka paljon pölkky painaa? Kuutiometri tuoretta koivua painaa 720 kg.
b) Kuinka paljon tuohta pölkystä saadaan?

277. Tehtaan ongelmajätteille rakennetaan suoran ympyrälieriön muotoinen betoninen säiliö, jonka sisältä mitattu pohjan halkaisija on 6,4 m ja korkeus 6,2 m. Säiliön seinämän ja pohjien paksuus on 20 cm. Kuinka monta kuutiometriä betonia tornin rakentamiseen tarvitaan?

278. Kasvihuoneen katto ja puoliympyrän muotoiset päädyt tehdään muovikalvosta.
a) Kuinka paljon muovia kasvihuoneeseen tarvitaan?
b) Kuinka suuri kasvihuoneen tilavuus on?



279. A4-arkki on mitoiltaan 210 mm × 297 mm. Arkki kiedotaan 297 mm:n korkuisen suoran ympyrälieriön vaipaksi. Mahtuuko lieriöön litra maitoa?

280. Suoran ympyrälieriön muotoisen 3 dl:n vetoisen makeistölkin vaippa tehdään pahvista. Tölkin pohjan halkaisija on 6,0 cm. Kuinka paljon pahvia yhteen tölkkiin tarvitaan?

281. Mehu suunnitellaan pakattavaksi yhden litran pahvitölkkeihin. Kuinka paljon pahvia tölkkiin tarvitaan, jos tölkin muodoksi valitaan 20,0 cm korkea

a) neliöpohjainen suora särmiö

b) suora ympyrälieriö?

282. Kerällä on 1,5 mm:n paksuista kuparilankaa, jonka poikkileikkaus on ympyrän muotoinen. Kerä painaa 340 g. Kuinka monta metriä lankaa kerässä on? Kuparin tiheys on 8 960 kg/m^3.

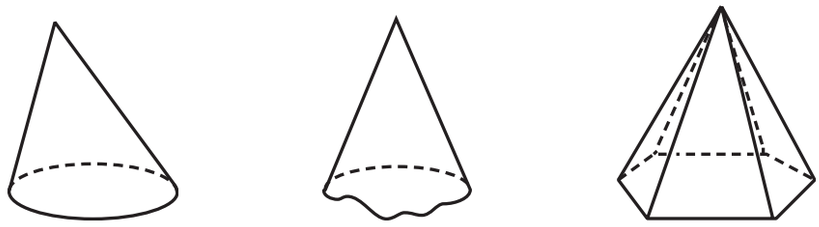
283. Harjakattoisen omakotitalon katon pituus on 12,0 m. Katonlappeiden leveys on 7,0 m ja kaltevuuskulma 25°. Ukkoskuuron aikana räystäiden alla oleviin sadevesitynnyreihin kertyi yhteensä 850 litraa vettä. Kuinka monta millimetriä vettä ukkoskuuron aikana satoi?

284. Karjan juottoallas on 4,8 m pitkä. Altaan pituutta vastaan kohtisuora poikkileikkaus on 36 cm:n levyinen puoliympyrä. Kuinka paljon vettä altaassa on silloin, kun altaan korkeudesta puolet on veden peitossa?

Kartio

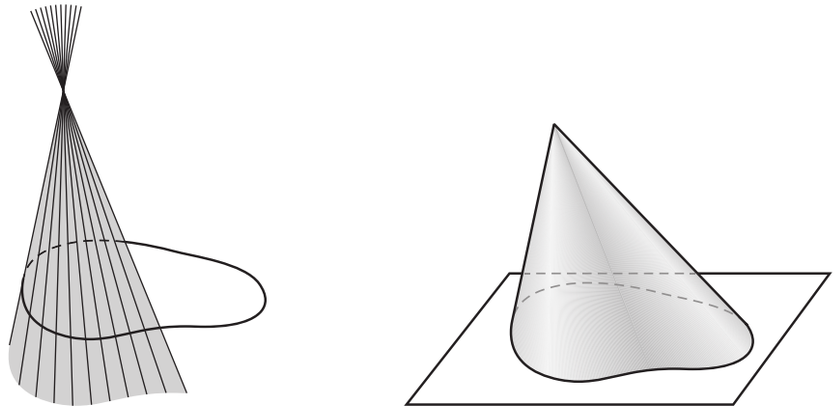
ONGELMA

Mitä yhteistä kuvion kappaleilla on?

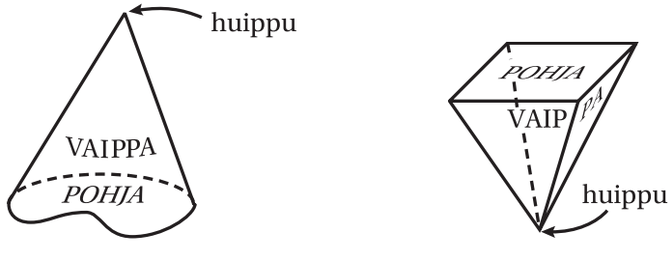


Kartio

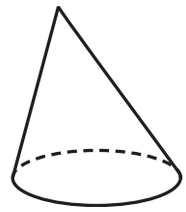
Kun suora liikkuu pitkin umpinaista viivaa, joka ei leikkaa itseään, ja jos suora kulkee koko ajan saman pisteen kautta, muodostuu *kartiopinta*. Kun kartiopinta leikataan tasolla, taso ja kartiopinta rajaavat *kartion*.



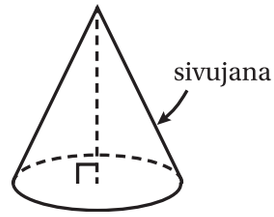
Kartiolla on *huippu*, *vaippa* ja *pohja*.



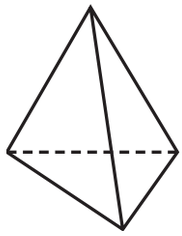
Ympyräkartion pohja on ympyrä.



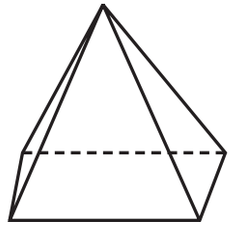
Ympyräkartio on *suora ympyräkartio*, jos huipusta pohjatasolle piirretty korkeusjana kulkee pohjaympyrän keskipisteen kautta. Suorassa ympyräkartiossa huippua ja pohjaympyrän kehää yhdistävä jana on kartion *sivujana*.



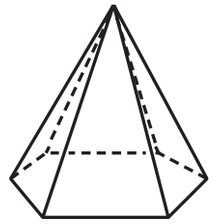
Pyramidi on kartio, jonka pohja on monikulmio.



kolmisivuinen pyramidi



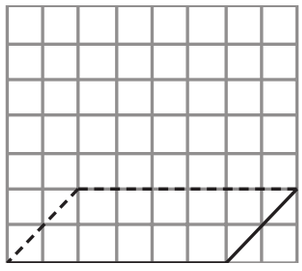
nelisivuinen pyramidi

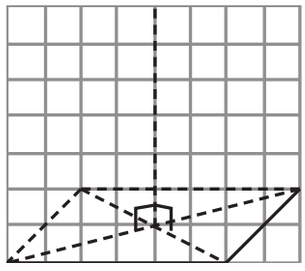


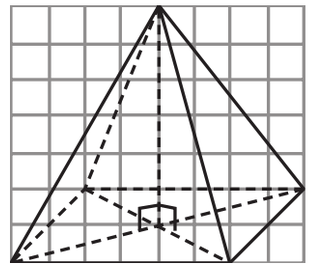
kuusisivuinen pyramidi

Pyramidi on *säännöllinen*, jos pyramidin pohja on säännöllinen monikulmio ja jos huipusta pohjalle piirretty korkeusjana kulkee pohjan keskipisteen kautta.

Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohja on neliö. Säännöllinen nelisivuinen pyramidi piirretään kavaljeeriperspektiivissä ruudukkoa hyödyntäen niin, että edessä oleva pohjasärmä ja korkeus ovat likimain oikeissa mittasuhteissa. Huippu on pohjan lävistäjien leikkauspisteen yläpuolella.





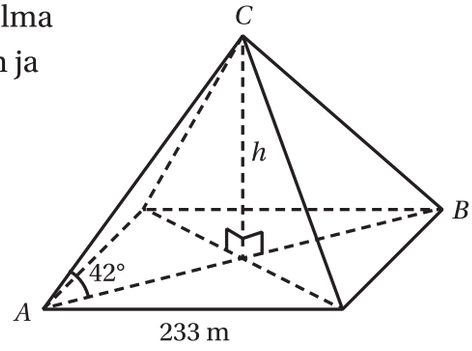


ESIMERKKI 1

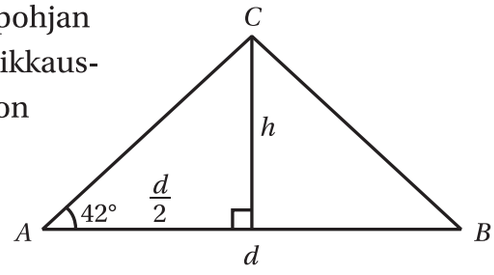
Kheopsin pyramidi on säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Pyramidin korkeus laskettiin seuraavien maasta tehtyjen mittausten avulla. Pohjasärmän pituudeksi mitattiin 233 m ja sivusärmän ja maanpinnan välisen kulman suuruudeksi 42°. Kuinka korkea Kheopsin pyramidi on?

RATKAISU

Sivusärmän ja maanpinnan välinen kulma on kulma, joka muodostuu sivusärmän ja pyramidin pohjan lävistäjän välille.



Kun pyramidi halkaistaan huipun ja pohjan lävistäjän kautta kulkevalla tasolla, leikkauskuvio on tasakylkinen kolmio. Kolmion kyljet ovat pyramidin sivusärmiä ja kolmion kanta on pohjaneliön lävistäjä d.

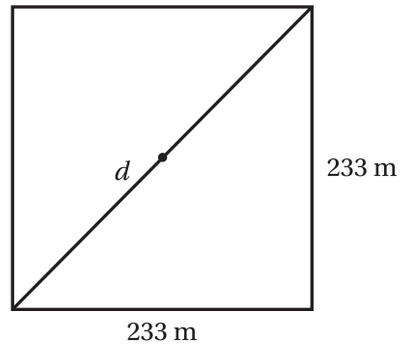


Pyramidin korkeus h voidaan ratkaista suorakulmaisesta kolmiosta, kun ensin ratkaistaan pohjan lävistäjän puolikkaan pituus $\frac{d}{2}$.

Pohjan lävistäjän pituus d saadaan Pythagoraan lauseella.

$d^2 = 233^2 + 233^2$

$d \approx -329{,}512$ tai $d \approx 329{,}512$



Lävistäjän pituus on $d \approx 329{,}512$ m, ja lävistäjän puolikkaan pituus on $\frac{d}{2} \approx 164{,}756$ m.

Ratkaistaan pyramidin korkeus.

$$\tan 42° = \frac{h}{164{,}756}$$

$$h \approx 148 \text{ (m)}$$

VASTAUS

148 m

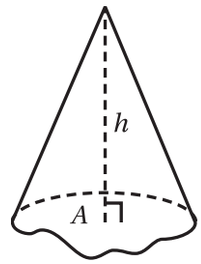
Kartion tilavuus

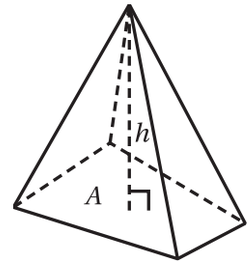
Kartion tilavuus on kolmasosa sellaisen lieriön tilavuudesta, jolla on sama pohja ja sama korkeus kuin kartiolla. Kartion tilavuus on siis kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta.

$$V = \frac{Ah}{3}$$

eli

$$V = \frac{1}{3}Ah$$

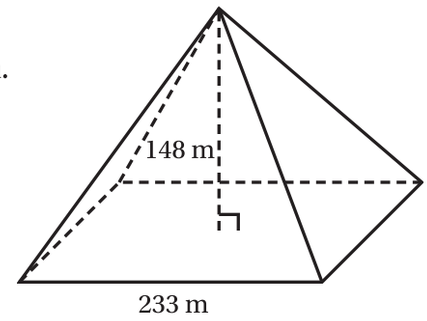




Kaavassa
A = kartion pohjan pinta-ala
h = kartion korkeus.

ESIMERKKI 2

Kheopsin pyramidin pohjasärmän pituus on 233 m ja pyramidin korkeus on 148 m. Kuinka suuri pyramidin tilavuus on?



RATKAISU

Kheopsin pyramidin pohja on neliö.

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{A \cdot h}{3} = \frac{233^2 \cdot 148}{3} \approx 2\,680\,000\ (\text{m}^3).$$

VASTAUS

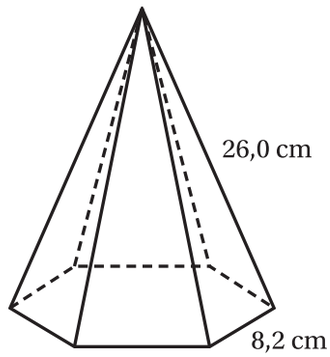
2 680 000 m^3

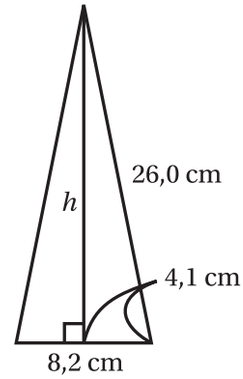
ESIMERKKI 3

Säännöllisen kuusisivuisen pyramidin pohjasärmien pituus on 8,2 cm ja sivusärmien pituus 26,0 cm. Kuinka suuri pyramidin vaipan pinta-ala on?

RATKAISU

Pyramidin vaippa muodostuu kuudesta samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta.





Ratkaistaan vaippakolmion korkeus h.

$h^2 + 4{,}1^2 = 26{,}0^2$ Pythagoraan lause.

$h \approx -25{,}67$ tai $h \approx 25{,}67$

Vaippakolmion korkeus on 25,67 cm.

Pyramidin vaipan pinta-ala on yhden vaippakolmion pinta-ala kuusinkertaisena.

$$A = 6 \cdot \frac{ah}{2}$$

$$\approx 6 \cdot \frac{8{,}2 \cdot 25{,}67}{2} \approx 630 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Sijoitetaan vaippakolmion kanta $a = 8{,}2$ (cm) ja korkeus $h \approx 25{,}67$ (cm).

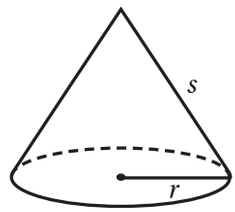
VASTAUS

630 cm^2

Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala

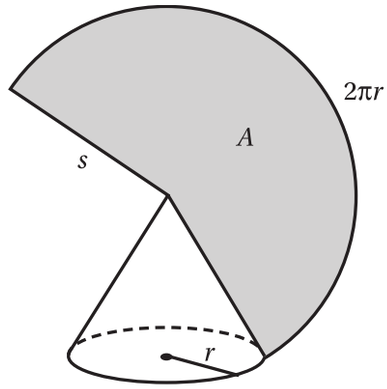
Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = \pi rs.$$



Kaavassa
r = kartion pohjaympyrän säde
s = kartion sivujanan pituus.

Perustelu. Kun suoran ympyräkartion vaippa leikataan auki pitkin sivujanaa, vaippa avautuu ympyränsektoriksi. Ympyrän säde on kartion sivujana s. Sektorin kaaren pituus on kartion pohjaympyrän kehän pituus $2\pi r$.



Sektorin pinta-alan A suhde koko s-säteisen ympyrän pinta-alaan πs^2 on yhtä suuri kuin sektorin kaaren pituuden $2\pi r$ suhde koko ympyrän kehän pituuteen $2\pi s$. Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan A.

$$\frac{A}{\pi s^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2\pi}\, r}}{\underset{1}{\cancel{2\pi}\, s}}$$ Supistetaan.

$$\frac{A}{\pi s^2} = \frac{r}{s} \quad | \cdot \pi s^2$$

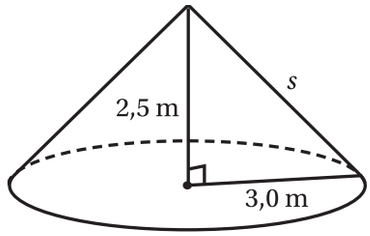
$$A = \frac{\pi \overset{s}{\cancel{s^2}} \cdot r}{\underset{1}{\cancel{s}}} = \pi rs$$

ESIMERKKI 4

Kuinka monta neliömetriä kangasta tarvitaan 2,5 metriä korkean ja 6,0 metriä leveän suoran ympyräkartion muotoisen teltan kattoon?

RATKAISU

Ratkaistaan sivujanan pituus s suorakulmaisesta kolmiosta.



$s^2 = 3{,}0^2 + 2{,}5^2$ Pythagoraan lause.

$s \approx -3{,}905$ tai $s \approx 3{,}905$

Sivujanan pituus on $s \approx 3{,}905$.

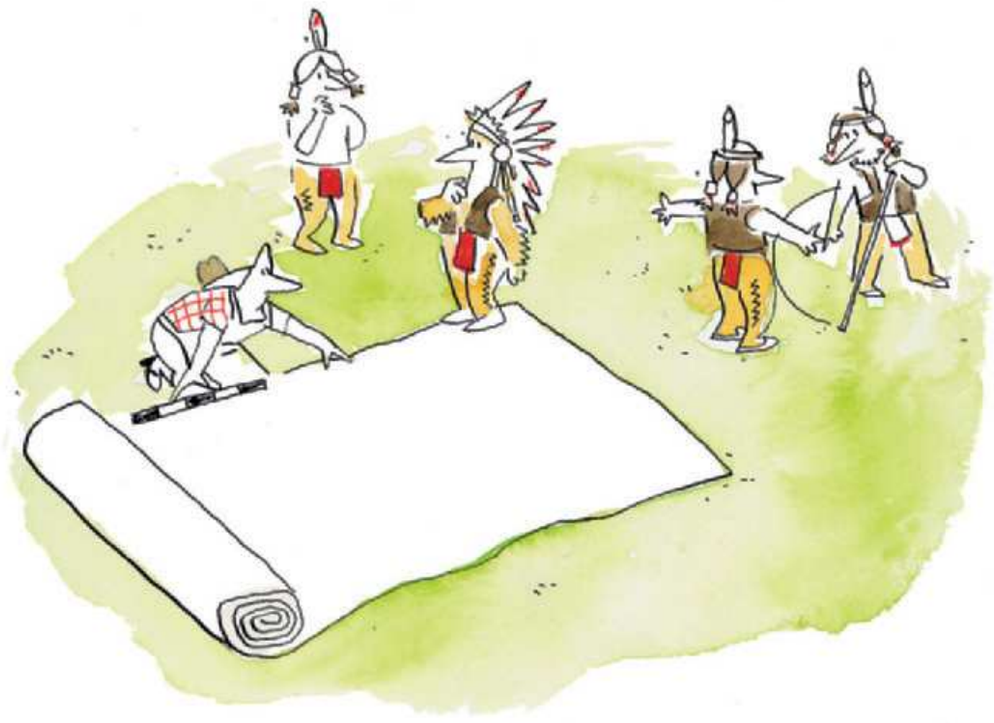
Vaipan pinta-ala on

$A = \pi rs$ Sijoitetaan pohjaympyrän säde $r = 3{,}0$ (m) ja sivujanan pituus $s \approx 3{,}905$ (m).

$\approx \pi \cdot 3{,}0 \cdot 3{,}905 \approx 37\ (\text{m}^2)$.

VASTAUS

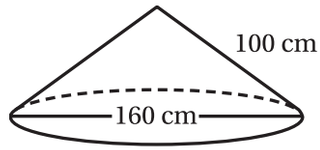
$37\ \text{m}^2$



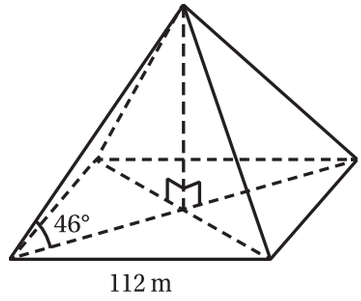
HARJOITUKSIA

Sarja I

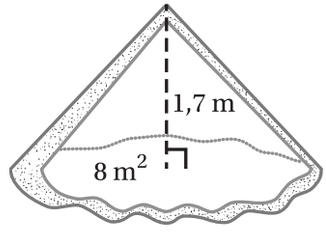
285. Keko on muodoltaan suora ympyräkartio. Kuinka korkea keko on?



286. Ramses II:n pyramidi on säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka pohjasärmän pituus on 112 metriä ja sivusärmä on 46°:n kulmassa maan tasoon nähden. Kuinka korkea pyramidi on?

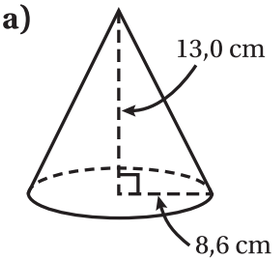


287. Auton lavalta kipattu hiekkakuorma muodostaa 1,7 metriä korkean kartion muotoisen keon, joka peittää 8 neliömetrin suuruisen alueen. Kuinka paljon hiekkaa pihalle tuotiin?

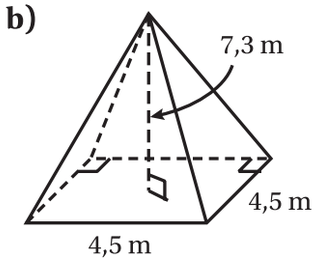


288. Laske kappaleen tilavuus.

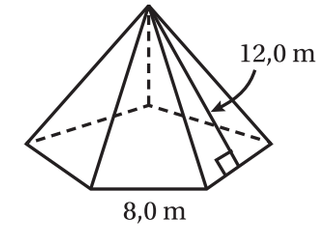
a)



b)



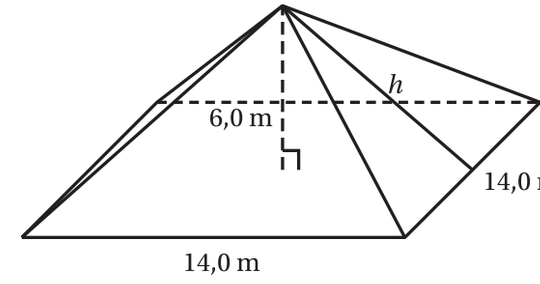
289. Laske säännöllisen pyramidin vaipan pinta-ala.



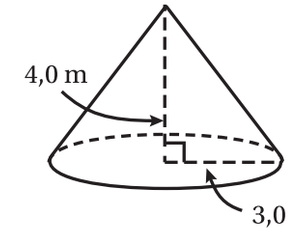
290. Rakennuksen katto on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi, jonka korkeus on 6,0 m ja pohjasärmien pituus 14,0 m.

a) Laske katonlappeiden korkeusjanan h pituus.

b) Kuinka suuri katon pinta-ala on?



291. Kuinka paljon kuparilevyä suoran ympyräkartion muotoisen katon päällystämiseen tarvitaan?



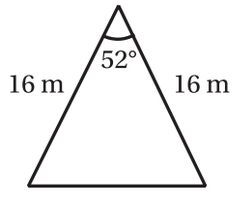
292. Kuohuviinilasi on muodoltaan suora ympyräkartio. Lasin korkeus on 13,6 cm ja suuaukon halkaisija 5,8 cm.
a) Kuinka monta senttilitraa kuohuviiniä lasiin mahtuu?
b) Lasi täytetään puoliväliin. Kuinka paljon viiniä lasissa on?

293. Suoran ympyräkartion pohjan halkaisija on 8,6 cm. Kartion sivujanan ja kartion pohjan välisen kulman suuruus on 63°. Laske kartion tilavuus ja vaipan pinta-ala.

294. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan pohjaneliön sivun pituus on 2,40 m. Teltan kattoon tarvittiin 12,0 m^2 kangasta. Kuinka suuri teltan tilavuus on?

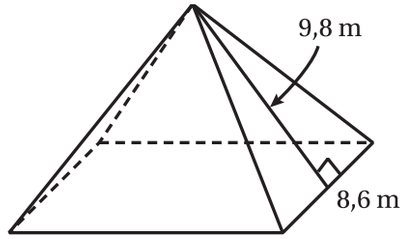
295. Paperista tehdyn suoran ympyräkartion pohjan halkaisijan pituus on 12,0 cm ja sivujanan pituus 10,4 cm. Kartion vaippa leikataan auki pitkin sivujanaa ja levitetään tasoon. Kuinka suuri muodostuvan ympyränsektorin keskuskulma on?

296. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin sivutahkot ovat kuvion mukaisia tasakylkisiä kolmioita. Kuinka suuri pyramidin tilavuus on?



Sarja II

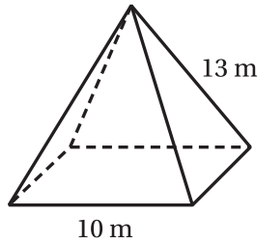
297. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjaneliön sivujen pituus on 8,6 m ja vaippakolmioiden korkeus 9,8 m. Laske pyramidin
a) korkeus **b)** tilavuus.



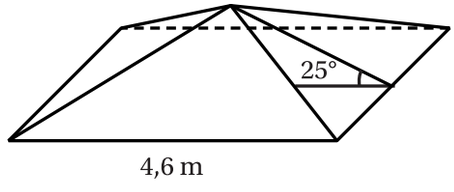
298. Suoran ympyräkartion sivujanan pituus on 3,2 cm ja pohjan halkaisija 3,6 cm. Kuinka suuri kartion tilavuus on?

299. Maahan iskeytynyt meteoriitti teki suoran ympyräkartion muotoisen kuopan, jonka läpimitta on 18 metriä ja jonka seinämä on 40°:n kulmassa maan tasoon nähden. Laske kuopan
a) syvyys **b)** tilavuus.

300. Laske säännöllisen pyramidin vaipan pinta-ala.



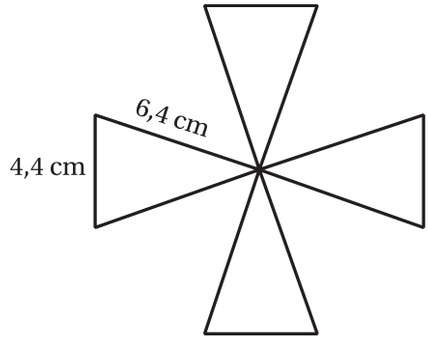
301. Katto on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Lappeiden kaltevuuskulma on 25°. Laske
a) kattorakennelman korkeus
b) katon rajoittama tilavuus
c) katon pinta-ala.



302. Vesitornin sisäosa on muodoltaan kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka korkeus on 14,0 metriä ja läpimitta 10,0 metriä. Sisäseinämä maalataan. Kuinka suuri maalattavan alueen pinta-ala on?

303. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen kahvilateltan korkeus on 4,0 m ja pohjaneliön sivun pituus 6,0 m. Kuinka paljon kangasta teltan kattoon on tarvittu?

304. Kuviossa on särmistä auki leikattu ja tasoon levitetty pyramidin vaippa. Kuinka suuri pyramidin tilavuus on?

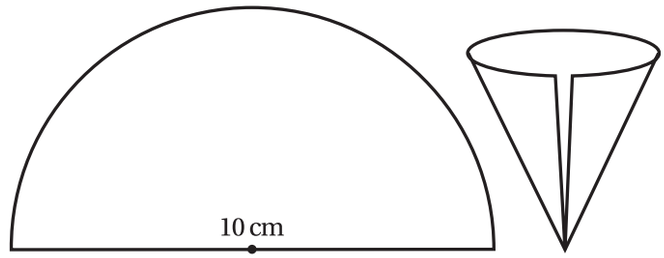


305. Pahvisesta puoliympyrästä, jonka halkaisija on 10 cm, muodostetaan suora ympyräkartio liittämällä säteet yhteen. Laske kartion

a) pohjan säde

b) korkeus

c) tilavuus.



306. On valmistettava suoran ympyräkartion muotoinen paperitötterö, jonka suuaukon halkaisija on 12,0 cm ja tilavuus 5,0 dl. Kuinka paljon paperia tötteröön tarvitaan?

307. Vesisäiliö on muodoltaan kärjellään seisova suora ympyräkartio, jonka korkeus on 12,0 m ja pohjan halkaisija 15,0 m.

a) Kuinka paljon säiliössä on vettä silloin, kun se on täynnä?

b) Säiliössä olevan vesikerroksen korkeudeksi mitattiin 3,6 m. Kuinka paljon säiliössä on vettä?

308. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin muotoisen teltan tukikehikkona on neljä teltan huipussa yhteen liitettyä 2,50 metrin pituista keppiä. Teltan korkeus on 2,00 m. Kuinka paljon kangasta teltan kattoon tarvitaan?

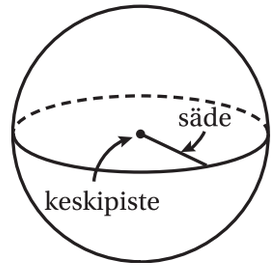
Pallo

ONGELMA

Pallon pinnalle on merkitty kaksi paikkaa.
a) Kuinka voidaan langan avulla määrittää lyhin reitti paikasta toiseen pitkin pallon pintaa?
b) Lyhin reitti paikasta toiseen pitkin pallon pintaa on ympyrän kaari. Mikä ympyrän keskipiste on?

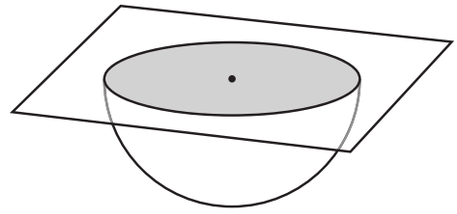
Pallo

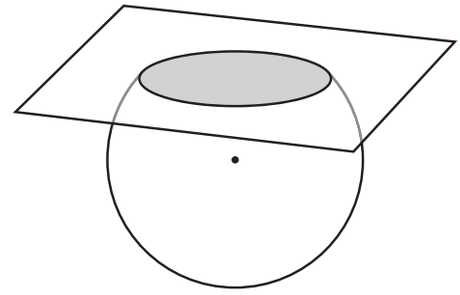
Pallo muodostuu niistä avaruuden pisteistä, jotka ovat samalla etäisyydellä (*säde*) kiinteästä pisteestä (*keskipiste*).



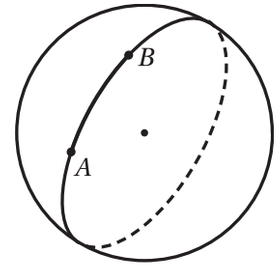
Iso- ja pikkuympyrät

Tason ja pallon leikkauskuvio on ympyrä. Jos taso kulkee pallon keskipisteen kautta, muodostuu *isoympyrä*. Isoympyrän säde on sama kuin pallon säde. Muita ympyröitä, joiden säde on lyhyempi, kutsutaan *pikkuympyröiksi*.





Lyhin reitti paikasta toiseen pallon pinnalla kulkee pitkin paikkojen kautta kulkevaa isoympyrää.



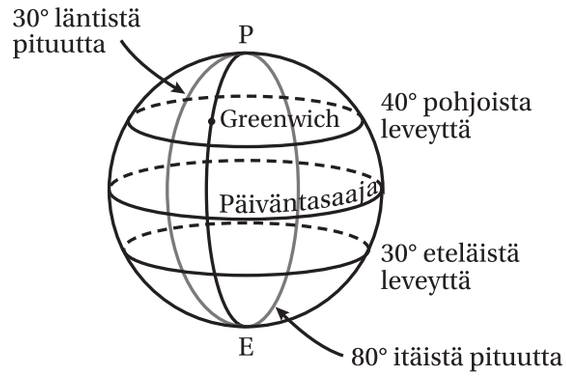
Maapallo

Planeetta Maa on likimain pallon muotoinen, ja monia käytännön ongelmia ratkaistaessa päästään riittävään tarkkuuteen, kun Maata pidetään pallona. Tämän niin sanotun *maapallon* pinnan kartoitus ja mittaukset perustuvat iso- ja pikkuympyröihin. Maapallon isoympyröiden pituus – maapallon ympärysmitta – on noin 40 000 km.*

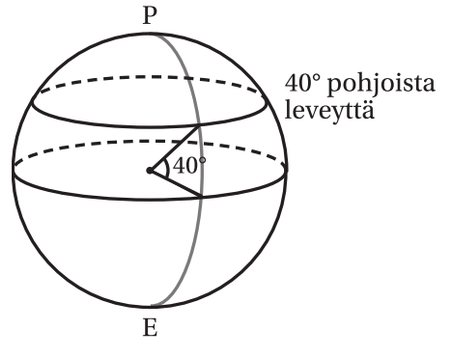
* Maapallon ympärysmitta ei ole sattumalta näin pyöreä luku. Kyseessä on itse asiassa pituusyksikön *metri* alkuperäinen määritelmä. Yksikön käyttöönotosta päätettiin Ranskan Suuren vallankumouksen aikana. Metrin pituudeksi vahvistettiin vuonna 1795 yksi kymmenesmiljoonasosa Pariisin kautta kulkevan pituuspiirin siitä osasta, joka on pohjoisnavan ja päiväntasaajan välissä. Näin maapallon ympärysmitaksi tuli neljäkymmentä miljoonaa metriä eli 40 000 km. Sittemmin metri on määritelty tarkemmin valon nopeuden avulla (metri on matka, jonka valo kulkee tyhjiössä $\frac{1}{299\,792\,458}$ sekunnissa). Myös Maan ympärysmitta tiedetään nykyään tarkemmin: napojen kautta mitattu ympärysmitta on 40 008 km ja päiväntasaajan pituus on 40 075 km. Maan olettaminen palloksi, jonka ympärysmitta on 40 000 km, antaa siis oikeita tuloksia yleensä kolmen numeron tarkkuudella.

Leveys- ja pituuspiirit, joita käytetään paikan ilmaisemiseen maapallolla, ovat maapallon iso- ja pikkuympyröitä.

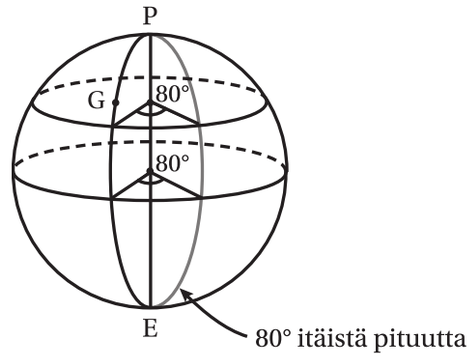
Leveyspiirejä ovat päiväntasaaja ja sen kanssa yhdensuuntaiset pikkuympyrät. *Pituuspiirit* ovat napojen kautta kulkevien isoympyröiden puolikkaita.



Leveyspiirin asteluku on leveyspiirille ja päiväntasaajalle piirrettyjen maapallon säteiden välisen terävän kulman suuruus, kun säteet on piirretty saman napojen kautta kulkevan isoympyrän kehälle. Leveyspiiri 0° on päiväntasaajan leveyspiiri, ja ääripäissä ovat etelänavan leveyspiiri 90° eteläistä leveyttä ja pohjoisnavan leveyspiiri 90° pohjoista leveyttä.



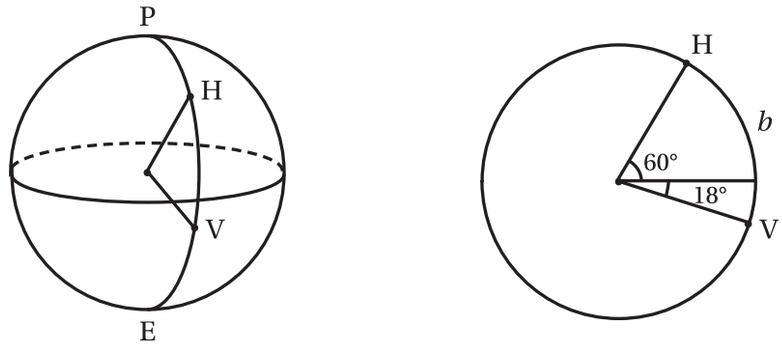
Peruspituuspiiri eli nollapituuspiiri on Englannissa sijaitsevan Greenwichin kautta kulkeva pituuspiiri. Pituuspiirin asteluku on päiväntasaajan (tai minkä tahansa muun leveyspiirin) keskipisteestä pituuspiirille ja nollapituuspiirille piirrettyjen säteiden välisen kulman suuruus. Suurin asteluku (180° sekä itäistä että läntistä pituutta) on Greenwichin ja napojen kautta kulkevan isoympyrän vastakkaisella puolikkaalla.



ESIMERKKI 1

Afrikassa Sambian ja Zimbabwen rajalla kuohuvat Victorian putoukset sijaitsevat samalla pituuspiirillä 25° itäistä pituutta kuin Helsinki. Putoukset sijaitsevat leveyspiirillä 18° eteläistä leveyttä, ja Helsinki sijaitsee leveyspiirillä 60° pohjoista leveyttä. Mikä on Victorian putousten etäisyys Helsingistä?

RATKAISU



Paikkakuntien etäisyys on niiden kautta kulkevan maapallon isoympyrän kaaren pituus. Koska Victorian putoukset ja Helsinki sijaitsevat samalla pituuspiirillä, etäisyys on pituuspiirin kaaren pituus. Kaaren keskuskulman suuruus on $60° + 18° = 78°$. Etäisyys on

$$b = \frac{78°}{360°} \cdot 40\,000 \approx 8\,700 \text{ (km)}.$$

VASTAUS

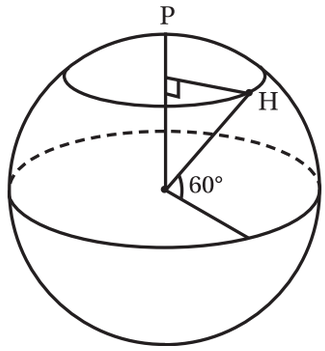
8 700 km

ESIMERKKI 2

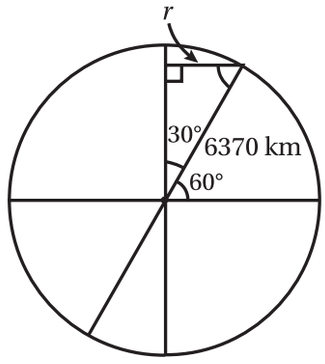
Kulkija lähtee Helsingistä ja kulkee kompassin avulla koko ajan itään. Kuinka pitkän matkan hän on taivaltanut, kun hän saapuu takaisin Helsinkiin? Helsingin sijainti on 60° pohjoista leveyttä. Maapallon säde on 6 370 km.

RATKAISU

Tehtävänä on laskea 60. leveyspiirin pituus.



Kun maapallo leikataan napojen ja Helsingin kautta kulkevalla tasolla, muodostuu viereinen leikkauskuvio. Kuviossa r on 60. leveyspiirin säde. Ratkaistaan säteen pituus.



$$\sin 30° = \frac{r}{6\ 370}$$

$$r = 3\ 185 \text{ (km)}$$

60. leveyspiirin pituus on

$$2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 3\ 185 \approx 20\ 000 \text{ (km)}.$$

VASTAUS

20 000 km

Pallon tilavuus ja pinta-ala

Pallon tilavuus lasketaan kaavalla

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

eli

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3,$$

missä r on pallon säde.

Pallon pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = 4\pi r^2.$$

ESIMERKKI 3

Sääluotaimen kohottaa ilmaan heliumilla täytetty pallo, jonka läpimitta on 95 cm. Laske pallon tilavuus ja pinta-ala.

RATKAISU

Pallon säde $r = \frac{95\text{ cm}}{2} = 47{,}5\text{ cm}$.

Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} = \frac{4 \cdot \pi \cdot 47{,}5^3}{3}\text{ cm}^3 \approx 450\,000\text{ cm}^3 = 450\text{ dm}^3 = 0{,}45\text{ m}^3.$$

Pallon pinta-ala on

$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 47{,}5^2\text{ cm}^2 \approx 28\,000\text{ cm}^2 = 280\text{ dm}^2 = 2{,}8\text{ m}^2.$$

VASTAUS

tilavuus $0{,}45\text{ m}^3$, pinta-ala $2{,}8\text{ m}^2$

ESIMERKKI 4

Pallon muotoiseen lämminvesivaraajaan tulee mahtua 600 litraa vettä. Kuinka suuri varaajan läpimitan tulee olla?

RATKAISU

Ilmaistaan varaajan tilavuus kuutiomittoina: $600\text{ l} = 600\text{ dm}^3$.

Ratkaistaan pallon tilavuuden kaavasta pallon säde r.

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 600$$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

$$r \approx 5{,}2322\text{ (dm)}$$

Säde r voidaan ratkaista myös kuutiojuuren avulla.

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 600 \qquad | \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 1800 \qquad | : (4\pi)$$

$$r^3 = \frac{1\,800}{4\pi}$$ Säde on oikean puolen kuutiojuuri.

$$r = \sqrt[3]{\frac{1\,800}{4\pi}} \approx 5{,}2322 \text{ (dm)}$$

Pallon halkaisija on $2r \approx 2 \cdot 5{,}2322 \approx 10{,}5$ (dm).

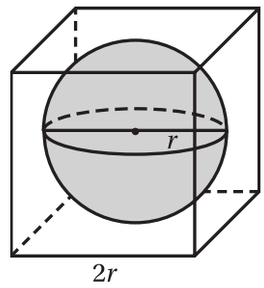
Varaajan läpimitan tulee olla $10{,}5 \text{ dm} = 105 \text{ cm}$.

VASTAUS 105 cm

ESIMERKKI 5 Pallo on pakattu mahdollisimman pieneen kuution muotoiseen pakkaukseen. Mikä on pallon tilavuuden suhde kuution tilavuuteen? Anna vastaukseksi suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

RATKAISU Merkitään pallon sädettä r.*

Kuution kaikki tahkot sivuavat palloa, joten kuution särmä on pallon halkaisijan pituinen. Siis kuution särmän pituus on $2r$.



Pallon tilavuus on $V_P = \frac{4\pi r^3}{3}$.

Kuution tilavuus on $V_K = (2r)^3 = 2r \cdot 2r \cdot 2r = 8r^3$.

Pallon tilavuuden suhde kuution tilavuuteen on

$$\frac{V_P}{V_K} = \frac{4\pi r^3}{3} : 8r^3$$ Sievennys symbolisella laskimella.

$$= \frac{\pi}{6}$$ Suhteen tarkka arvo.

$$\approx 0{,}524 = 52{,}4\ \%.$$ Suhteen likiarvo prosentteina.

VASTAUS $\frac{\pi}{6} \approx 52{,}4\ \%$

---

* Tehtävässä ei ole annettu pallon halkaisijan tai säteen pituutta, joten ratkaisun tulee osoittaa, että suhde ei riipu pallon koosta. Siksi pallon sädettä on merkittävä kirjaimella.

HARJOITUKSIA

Sarja I

309. Helsinki ja Ateena sijaitsevat likipitäen samalla pituuspiirillä. Helsingin leveyspiiri on 60° pohjoista leveyttä ja Ateenan 38° pohjoista leveyttä. Mikä Helsingin ja Ateenan välinen etäisyys on?

310. **a)** Kun kuljetaan suoraan etelään tai pohjoiseen, niin kuinka pitkällä matkalla leveyspiiri muuttuu yhden asteen?
b) Jos kierretään maapallo lähtemällä Helsingistä suoraan etelään, matkalla kohdataan järjestyksessä seuraavan taulukon paikkakunnat. Laske, kuinka pitkä matka on kuljettu, kun saavutaan paikkakunnalle. Käytä hyväksesi a-kohdassa laskettua matkaa.

paikkakunta	leveyspiiri	kuljettu matka (km)
Helsinki	60° pohj.	0
Kairo	30° pohj.	
Lusaka	15° etel.	
etelänapa	90° etel.	
Cooksaaret	20° etel.	
Honolulu	20° pohj.	
pohjoisnapa	90° pohj.	
Helsinki		40 000

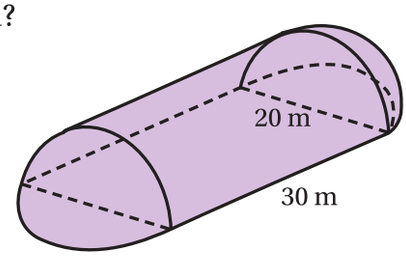
c) Mikä on Honolulun etäisyys Helsingistä?

311. Utsjoki sijaitsee 70. pohjoisella leveyspiirillä. Kulkija lähtee Utsjoelta ja kulkee koko ajan länteen. Kuinka pitkä matka hänellä on takanaan, kun hän saapuu takaisin Utsjoelle? Maapallon säde on 6 370 km.

312. Koripallon läpimitta on 25 cm. Laske koripallon
a) tilavuus **b)** pinta-ala.

313. Pallon läpimitta on 50,0 cm. Kuinka paljon pallo painaa, jos se on valmistettu
a) lyijystä (tiheys 11 350 kg/m^3)
b) styroksista (tiheys 21,0 kg/m^3)?

314. **a)** Laske kuplahallin tilavuus.
b) Kuinka paljon muovia hallin rakentamiseen tarvitaan?



315. Pallon muotoisen kaasusäiliön vetoisuuden tulee olla 4 000 litraa. Kuinka suuri säiliön läpimitan tulee olla?

316. Pallon muotoisen teräksestä valmistetun säiliön ulkoläpimitta on 88,0 cm ja seinämän paksuus 7,0 mm. Teräksen tiheys on 7 850 kg/m^3. Kuinka paljon säiliö painaa?

317. Muovailuvahasta leikattu kuutio, jonka särmän pituus on 10,0 cm, muovataan palloksi. Kuinka monta prosenttia kappaleen pinta-ala tällöin suurenee tai pienenee?

318. Televisiosatelliitti Astra on 36 000 km:n korkeudella niin sanotulla geostationaarisella radalla, eli se pysyttelee koko ajan saman päiväntasaajan kohdan yläpuolella. Mille pohjoiselle leveyspiirille satelliitin näkyvyysalue ulottuu? Maapallon säde on 6 370 km.

319. Pallo on pakattu mahdollisimman pieneen suoran ympyrälieriön muotoiseen pakkaukseen. Laske pallon tilavuuden suhde lieriön tilavuuteen. Anna vastaukseksi suhteen tarkka arvo ja likiarvo prosentteina prosentin kymmenesosan tarkkuudella.

320. Pallon halkaisijan pituus on 6. Pallon sisällä on suora ympyrälieriö, jonka pohjaympyröiden kehät ovat pallon pinnalla. Lieriön korkeus on 4. Laske lieriön tilavuuden suhde pallon tilavuuteen.

Sarja II

321. Kajaani ja Johannesburg sijaitsevat samalla pituuspiirillä 28° itäistä pituutta. Kajaanin leveyspiiri on 64° pohjoista leveyttä ja Johannesburgin 26° eteläistä leveyttä. Kuinka kaukana Johannesburg on Kajaanista? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

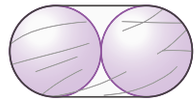
322. Peking ja New York sijaitsevat samalla leveyspiirillä 41° pohjoista leveyttä. Peking sijaitsee pituuspiirillä 116° itäistä pituutta ja New York 74° läntistä pituutta.
a) Laske 41. pohjoisen leveyspiirin pituus. Maapallon säde on 6 370 km.
b) Kuinka pitkä matka on Pekingistä New Yorkiin, jos matka tehdään kulkemalla koko ajan itään?

323. Likipitäen pallon muotoisen kuorimattoman appelsiinin läpimitta on 10,5 cm. Kuoren paksuus on 1,0 cm. Kuinka monta prosenttia appelsiinin tilavuudesta on kuorta?

324. **a)** Kuinka monta litraa ilmaa on pallon muotoisessa ilmapallossa, jonka läpimitta on 25 cm?
b) Kuinka monta litraa palloon pitäisi puhaltaa lisää ilmaa, jotta läpimitaksi tulisi 35 cm?

325. Puolipallon muotoisen muuripadan tulee vetää 100 litraa vettä. Kuinka suuri padan läpimitan tulee olla?

326. Kaksi tennispalloa, joiden halkaisija on 6,6 cm, on pakattu kireään umpinaiseen muovikalvoon. Kuinka suuri kalvon pinta-ala on?



327. Pallon pinta-ala on 1,00 dm^2. Mikä pallon tilavuus on?

328. Metallikuutiosta, jonka särmän pituus on 10,0 cm, työstetään sorvaamalla ja hiomalla mahdollisimmin suuri pallo. Kuinka monta prosenttia metallista menee hukkaan?

329. Miesten kuulantyönnössä käytettävän kuulan painoksi on määrätty 7,257 kg (16 paunaa). Kuula on yleensä terästä tai messinkiä. Kuinka suuri teräksisen kuulan läpimitta on? Teräksen tiheys on 7 850 kg/m^3.

330. Sääsatelliitti ylittää juuri pohjoisnavan 1 200 kilometrin korkeudella. Mille leveyspiirille satelliitin näkyvyysalue ulottuu? Maapallon säde on 6 370 km.

331. Pallon halkaisijan pituus on 6. Pallon sisällä on suora ympyräkartio, jonka pohjaympyrän kehä ja huippu ovat pallon pinnalla. Kartion korkeus on 4. Laske kartion tilavuuden suhde pallon tilavuuteen.

HARJOITUKSIA AVARUUSGEOMETRIASTA

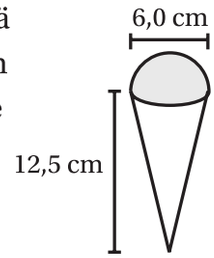
Tehtäviä voidaan käyttää avaruusgeometrian kertaamiseen ja täydentävään harjoitteluun.

Sarja I

332. Suoran ympyrälieriön muotoiseen astiaan kaadettiin 2,1 litraa vettä. Tällöin vedenpinnan korkeus astiassa kohosi 13 cm. Kuinka pitkä lieriön pohjan halkaisija on?

333. On kaivettava 150 m pitkä kanava, jonka leveys pinnassa on 16,0 m ja pohjassa 12,0 m ja jonka syvyys on 5,0 m. Kanavan seinämät ovat suorat. Kuinka paljon maata joudutaan poistamaan?

334. Jäätelötuutin jäätelö täyttää suoran ympyräkartion muotoisen vohvelin ja muodostaa sen päälle puolipallon. Kuinka paljon tuutissa on jäätelöä? Anna vastaus desilitroina.

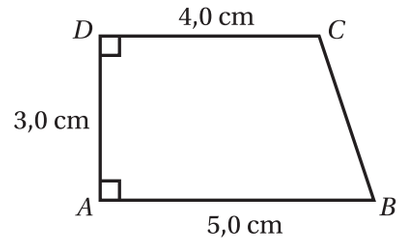


335. *Tetraedri* on säännöllinen kolmisivuinen pyramidi, jonka pohja ja vaippatahkot ovat samanlaisia tasasivuisia kolmioita. Kuinka paljon pahvia tarvitaan tetraedrin muotoiseen pakkaukseen, jonka kaikkien särmien pituus on 7,0 cm?

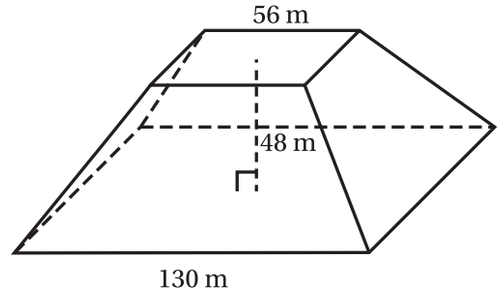
336. Kuvan mukainen puolisuunnikas $ABCD$ pyörähtää sivun CD ympäri. Laske muodostuvan kappaleen

a) tilavuus

b) kokonaispinta-ala.



337. Pyramidin rauniota rajoittavien yhdensuuntaisten neliöiden sivut ovat 130 m ja 56 m. Raunion korkeus on 48 m. Kuinka korkea pyramidi on ollut?

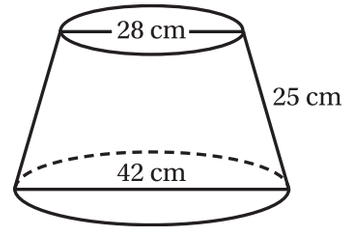


338. Kuvassa oleva katkaistu ympyräkartio on saatu sahaamalla suora ympyräkartio pohjan suuntaisesti kahteen osaan. Laske

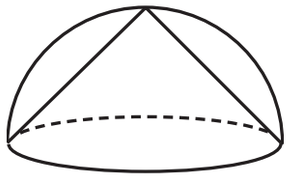
a) alkuperäisen kartion sivujanan pituus

b) alkuperäisen kartion tilavuus

c) katkaistun kartion tilavuus.



339. Puolipallon sisällä on suora ympyräkartio, jonka pohjana on puolipalloa rajaava ympyrä ja jonka huippu on puolipallon pinnalla. Osoita, että kartion tilavuus on puolet puolipallon tilavuudesta.



Sarja II

340. Suorakulmaisen särmiön muotoisen huoneen pituus on 5,0 m, leveys 4,0 m ja korkeus 3,2 m. Keskellä huonetta 90 cm:n etäisyydellä katosta on kattovalaisin. Mikä on valaisimen etäisyys lattianurkista?

341. Talon katto on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Katon pituus ja leveys ovat 16 metriä, ja katon lappeiden kaltevuuskulma on 17°. Kuinka suuri katon pinta-ala on?

342. Mehupakkaus on muodoltaan kolmisivuinen pyramidi, jonka pohja on tasasivuinen kolmio. Pohjakolmion sivujen pituus on 8,0 cm, ja pyramidin korkeus on 6,5 cm. Mikä pakkauksen tilavuus on?

343. Kattilassa, jonka pohjan halkaisija on 8,0 cm ja korkeus 10,0 cm, kuumennetaan vettä. Veden kuumennuttua astian pohjalle painetaan lämpenemään tuttipullo, jonka pohjan halkaisija on 6,0 cm ja korkeus yli 10,0 cm. Kuinka korkealle kattilan vesikerros saa enintään ulottua, jotta vettä ei tällöin valuisi liedelle?

344. Tasakylkisen kolmion kylkien pituus on 17 cm ja kannan pituus 16 cm. Laske sen kappaleen koko pinnan ala, joka muodostuu, kun kolmio pyörähtää

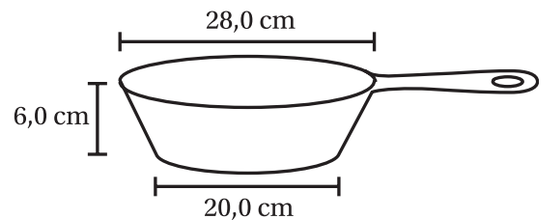
a) kannalle piirretyn korkeusjanan ympäri

b) kannan ympäri.

345. Suoran ympyräkartion muotoisen vesisäiliön pohjan halkaisija on 8,6 m. Säiliön vaipan rakentamiseen käytettiin 280 m^2 teräslevyä. Laske säiliön tilavuus.

346. Suoran ympyrälieriön muotoisen öljysäiliön tilavuus on 250 m^3. Säiliön sivukuva etäältä katsottaessa on neliö. Määritä säiliön mitat.

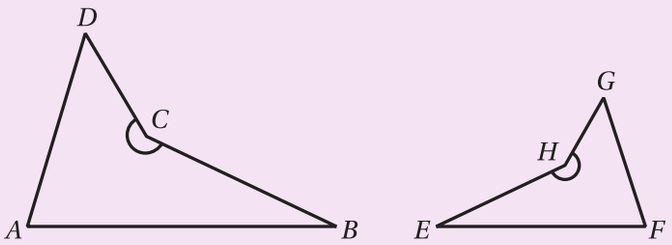
347. Laske paistinpannun tilavuus.



KERTAUS

Yhdenmuotoisuus

Kuviot, jotka saadaan toisistaan suurentamalla, pienentämällä tai peilaamalla, ovat yhdenmuotoiset.



Nelikulmio $EFGH$ on nelikulmion $ABCD$ pienennetty peilikuva, joten nelikulmiot $EFGH$ ja $ABCD$ ovat yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisissa kuvioissa kulma ja vastinkulma ovat yhtä suuret.

Esimerkiksi $\sphericalangle BCD = \sphericalangle GHE$.

Kaikki suhteet

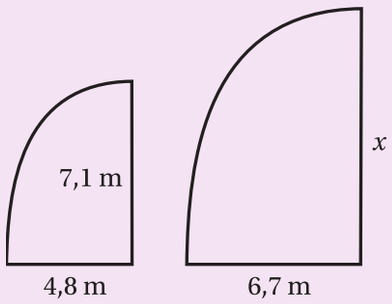
$$\frac{\text{vastinjanan pituus}}{\text{janan pituus}}$$

ovat yhtä suuret. Tämä suhde on yhdenmuotoisuussuhde eli mittakaava.

Esimerkiksi lävistäjien FH ja AC pituuksien suhde on yhtä suuri kuin sivujen EF ja AB pituuksien suhde:

$$\frac{FH}{AC} = \frac{EF}{AB}.$$

Yhdenmuotoisuussuhde voidaan määrittää, jos tunnetaan yhden janan ja sen vastinjanan pituudet.



Purjeet ovat yhdenmuotoiset. Yhdenmuotoisuussuhde on $\frac{6,7}{4,8}$.

Janojen pituuksia voidaan määrittää verrantoyhtälöllä.

Lasketaan suuremman purjeen korkeus x.

$$\frac{x}{7{,}1} = \frac{6{,}7}{4{,}8}$$

$$x \approx 9{,}9 \text{ (m)}$$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Verrantoyhtälö voidaan ratkaista myös kertomalla ristiin.

$$\frac{x}{7{,}1} = \frac{6{,}7}{4{,}8}$$

$$4{,}8x = 6{,}7 \cdot 7{,}1$$

$$x = \frac{6{,}7 \cdot 7{,}1}{4{,}8} \approx 9{,}9 \text{ (m)}$$

Verrantoja voi muodostaa myös toisella tavalla: saman kuvion kahden janan suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisessa kuviossa olevien vastinjanojen suhde.

Korkeuden suhde leveyteen on molemmissa purjeissa yhtä suuri:

$$\frac{x}{6{,}7} = \frac{7{,}1}{4{,}8}.$$

Kun kerrotaan ristiin, saadaan sama yhtälö kuin edellä.

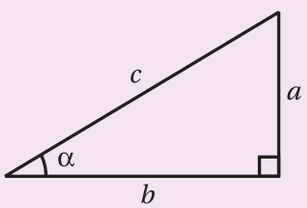
Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on yhdenmuotoisuussuhteen (mittakaavan) neliö.

Pienemmän purjeen pinta-alan suhde suuremman purjeen pinta-alaan on

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{4{,}8}{6{,}7}\right)^2 \approx 0{,}51 = 51\ \%.$$

Tangentti, sini ja kosini

Terävän kulman tangentti, sini ja kosini ovat suorakulmaisen kolmion sivujen suhteita. Jos suorakulmaisessa kolmiossa on terävä kulma α, niin

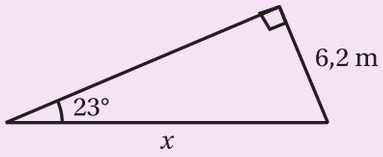


$$\tan\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{viereinen kateetti}} \qquad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sin\alpha = \frac{\text{vastainen kateetti}}{\text{hypotenuusa}} \qquad \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{viereinen kateetti}}{\text{hypotenuusa}}. \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Tangentin, sinin ja kosinin avulla voidaan ratkaista suorakulmaisen kolmion sivuja



$$\sin 23° = \frac{6{,}2}{x}$$

$$x \approx 16 \text{ (m)}$$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Voidaan myös ratkaista:

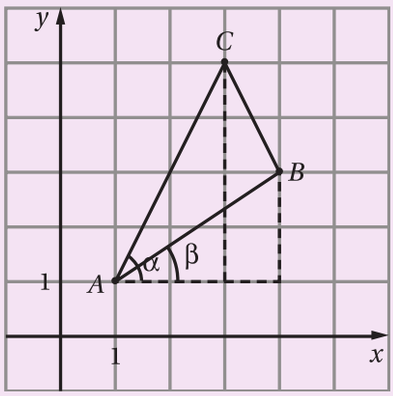
$$\sin 23° = \frac{6{,}2}{x} \qquad | \cdot x$$

$$x \cdot \sin 23° = 6{,}2 \qquad | : \sin 23°$$

$$x = \frac{6{,}2}{\sin 23°} \approx 16 \text{ (m)}.$$

ja kulmia.

Kolmion kärkinä ovat koordinaatiston pisteet $A(1, 1)$, $B(4, 3)$ ja $C(3, 5)$. Lasketaan kolmion kulman A suuruus asteen kymmenesosan tarkkuudella.



Kolmion ABC kulma A on kuvioon merkittyjen kulmien α ja β erotus.

$$\tan \alpha = \frac{4}{2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{2}\right) \approx 63{,}435°$$

$$\tan \beta = \frac{2}{3}$$

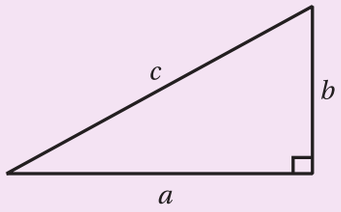
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33{,}690°$$

Siis $\sphericalangle A \approx 63{,}435° - 33{,}690° \approx 29{,}7°$.

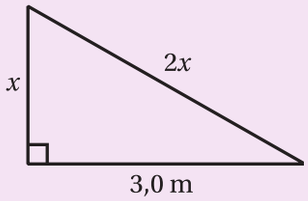
Pythagoraan lause

Suorakulmaisen kolmion sivuille pätee Pythagoraan lause: kateettien pituuksien neliöiden summa on yhtä suuri kuin hypotenuusan pituuden neliö.

$a^2 + b^2 = c^2$



Suorakulmaisen kolmion yhden kateetin pituus on 3,0 m, ja kolmion hypotenuusa on kaksi kertaa niin pitkä kuin toinen kateetti. Ratkaistaan toisen kateetin pituus.



$(2x)^2 = x^2 + 3{,}0^2$

$x \approx -1{,}7$ tai $x \approx 1{,}7$ Ratkaisu symbolisella laskimella.

Toisen kateetin pituus on 1,7 m.

Voidaan myös ratkaista:

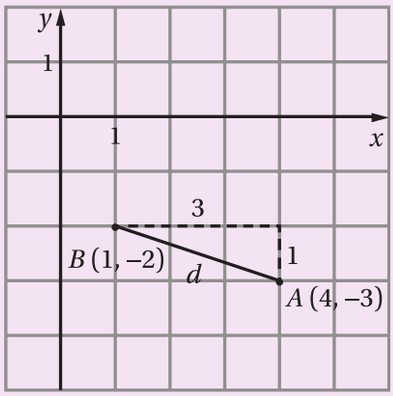
$$(2x)^2 = x^2 + 3{,}0^2$$
$$2x \cdot 2x = x^2 + 9$$
$$4x^2 = x^2 + 9 \quad | - x^2$$
$$3x^2 = 9 \quad | : 3$$
$$x^2 = 3$$

$x = \sqrt{3} \approx 1{,}7$ tai $x = -\sqrt{3} \approx -1{,}7$.

Toisen kateetin pituus on 1,7 m.

Pisteiden etäisyys koordinaatistossa lasketaan Pythagoraan lauseen avulla.

Lasketaan pisteiden $A(4, -3)$ ja $B(1, -2)$ etäisyys.



$d^2 = 3^2 + 1^2$

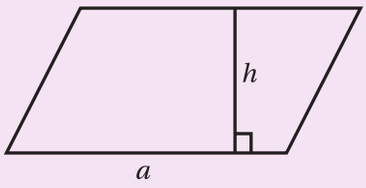
$d = \sqrt{10} \approx 3{,}2$ tai $d = -\sqrt{10} \approx -3{,}2$

Pisteiden A ja B etäisyys on $\sqrt{10} \approx 3{,}2$.

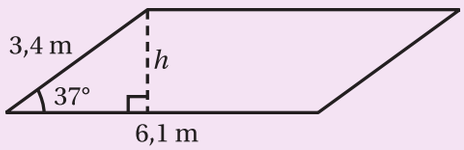
Suunnikas ja puolisuunnikas

Suunnikkaan pinta-ala on kannan ja korkeuden tulo.

$A = ah$



Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 6,1 m ja 3,4 m. Suunnikkaan terävän kulman suuruus on 37°.



Suunnikkaan pinta-alan laskemiseksi määritetään 6,1 m:n pituiselle sivulle piirretyn korkeusjanan pituus.

$$\sin 37° = \frac{h}{3{,}4}$$

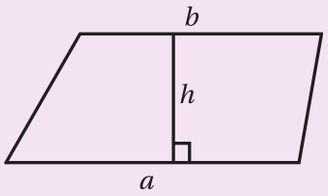
$$h \approx 2{,}046 \text{ (m)}$$

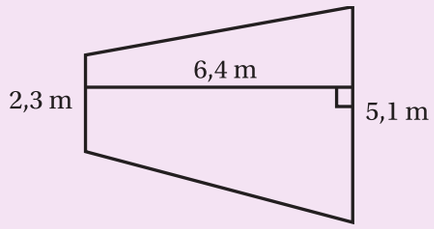
Suunnikkaan pinta ala on

$A = ah \approx 6{,}1 \cdot 2{,}046 \approx 12 \text{ (m}^2\text{)}$.

Puolisuunnikkaan pinta-ala on yhdensuuntaisten sivujen pituuksien keskiarvon ja korkeuden tulo.

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h$$





Kuvion puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{2{,}3+5{,}1}{2} \cdot 6{,}4 \approx 24\ (\text{m}^2).$$

Ympyrä

Luku π on ympyrän kehän pituuden suhde halkaisijan pituuteen, joten ympyrän kehän pituus on

$p = \pi d$, missä d on ympyrän halkaisija,

eli

$p = 2\pi r$, missä r on ympyrän säde.

Jos puunrungon halkaisija on 1,7 m, niin rungon ympärysmitta on

$$p = \pi \cdot 1{,}7 \approx 5{,}3\ (\text{m}).$$

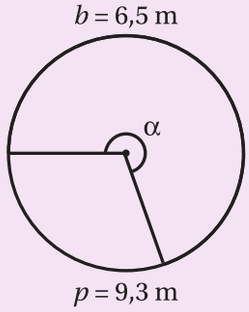
Ympyrän muotoinen luistinrata, jonka pituus on 100 m, voidaan merkitä käyttämällä säteenä köyttä, jonka pituus on

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{100}{2\pi} \approx 15{,}9\ (\text{m}).$$

Ympyrän kaaren pituuden b suhde koko ympyrän kehän pituuteen p on yhtä suuri kuin kaarta vastaavan keskuskulman α suhde täysikulmaan 360°.

$$\frac{b}{p} = \frac{\alpha}{360°}$$

Ympyrään, jonka kehän pituus on 9,3 m, on piirretty 6,5 m:n pituinen kaari. Ratkaistaan kaarta vastaavan keskuskulman suuruus.



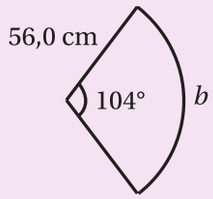
$$\frac{\alpha}{360°} = \frac{6{,}5}{9{,}3} \quad | \cdot 360°$$

$$\alpha = \frac{6{,}5}{9{,}3} \cdot 360° \approx 250°$$

Jos tunnetaan ympyrän säde r ja kaaren keskuskulman α suuruus, niin kaaren pituus on

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r.$$

Kaaren pituus on



$$b = \frac{104^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 56{,}0$$
$$\approx 102 \text{ (cm)}.$$

Ympyrän pinta-ala on

$A = \pi r^2$, missä r on ympyrän säde.

Ratkaistaan, kuinka pitkä ympyrän säteen tulee olla, jotta ympyrän pinta-ala olisi $32\ \text{cm}^2$.

$$\pi r^2 = 32$$

$r \approx -3{,}2$ tai $r \approx 3{,}2$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Ympyrän säde on 3,2 cm.

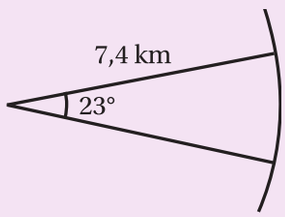
Voidaan myös ratkaista:

$$\pi r^2 = 32 \qquad | : \pi$$
$$r^2 = \frac{32}{\pi}$$
$$r = \sqrt{\frac{32}{\pi}} \approx 3{,}2 \text{ tai } r = -\sqrt{\frac{32}{\pi}} \approx -3{,}2.$$

Ympyrän säde on 3,2 cm.

Sektorin pinta-alan suhde koko ympyrän pinta-alaan on yhtä suuri kuin sektorin keskuskulman α suhde täysikulmaan 360°. Jos tunnetaan sektorin keskuskulman α suuruus ja ympyrän säde r, niin sektorin pinta-ala on

$$A_S = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2.$$

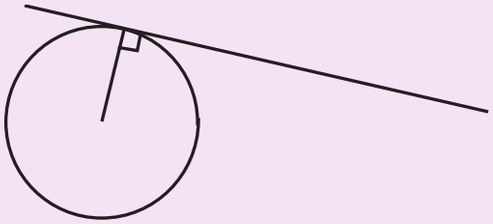


Sektorin pinta-ala on

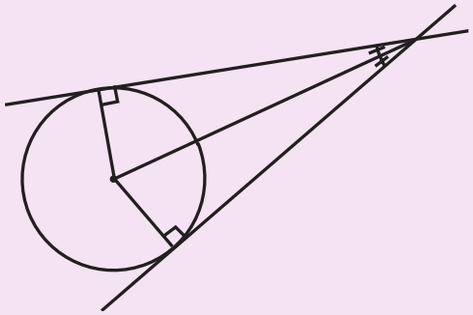
$$A = \frac{23^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 7{,}4^2 \approx 11 \text{ (km}^2\text{)}.$$

Ympyrän tangentti

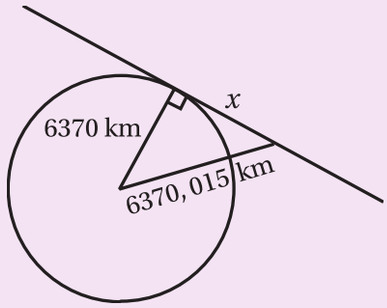
Ympyrän tangentti on suora, joka kohtaa ympyrän vain yhdessä pisteessä. Tangentti on kohtisuorassa sivuamispisteeseen piirrettyä sädettä vastaan.



Ympyrän ulkopuolisen pisteen kautta voidaan ympyrälle piirtää kaksi tangenttia. Keskipisteen kautta kulkeva suora puolittaa tangenttien välisen kulman.



Ratkaistaan, kuinka kauas merelle näkyy rantakalliolta 15 metrin korkeudelta.

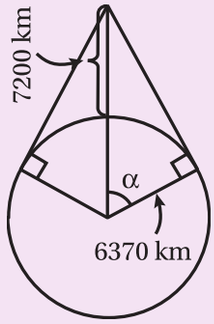


$$x^2 + 6\,370^2 = 6\,370{,}015^2$$

$$x \approx -14 \text{ tai } x \approx 14$$

Rantakalliolta näkyy 14 km:n päähän.

Viestintäsatelliitti on pohjoisnavan yläpuolella 7 200 kilometrin korkeudella. Ratkaistaan, mille pohjoisille leveysasteille satelliitin näkökenttä ulottuu.



Ratkaistaan kuvion kulma α.

$$\cos\alpha = \frac{6\ 370}{6\ 370 + 7\ 200}$$

$$\cos\alpha = \frac{6\ 370}{13\ 570}$$

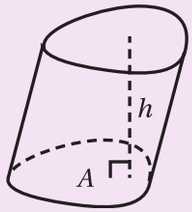
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{6\ 370}{13\ 570}\right) \approx 62°$$

Rajana on leveysaste $90° - 62° = 28°$ pohjoista leveyttä. Näkyvyysalue ulottuu niille pohjoisille leveysasteille, joiden asteluku on suurempi kuin 28°.

Lieriö

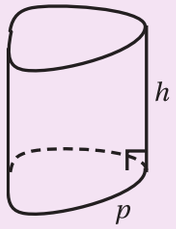
Lieriön tilavuus on lieriön pohjan pinta-alan ja lieriön korkeuden tulo.

$V = Ah$



Suoran lieriön vaipan pinta-ala on lieriön pohjan piirin ja lieriön korkeuden tulo.

$A = ph$

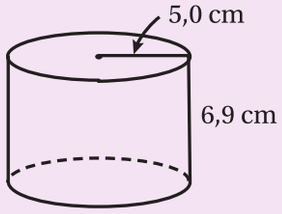


Kun $15\ \text{m}^3$ hiekkaa levitetään tasaiseksi kerrokseksi $250\ \text{m}^2$:n suuruiselle leikkikentälle, niin hiekkakerroksen paksuudeksi tulee

$$h = \frac{V}{A} = \frac{15\ \text{m}^3}{250\ \text{m}^2} = 0{,}060\ \text{m}$$

eli $6{,}0$ cm.

Suoran ympyrälieriön pohjan säde on $5{,}0$ cm ja lieriön korkeus on $6{,}9$ cm.



Lieriön vaipan pinta-ala on

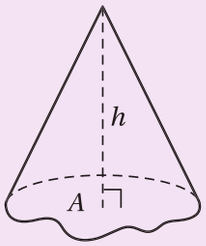
$A = ph = 2\pi r \cdot h$

$= 2\pi \cdot 5{,}0 \cdot 6{,}9 \approx 220\ (\text{cm}^2)$.

Kartio

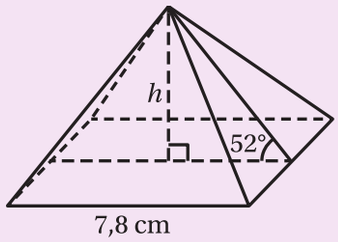
Kartion tilavuus on kolmasosa kartion pohjan pinta-alan ja kartion korkeuden tulosta.

$$V = \frac{Ah}{3}$$



Pyramidin vaippa muodostuu kolmioista.

Säännöllisen nelisivuisen pyramidin pohjaneliön sivujen pituus on 7,8 cm. Pyramidin vaippakolmioiden ja pyramidin pohjan välisen kulman suuruus on 52°. Lasketaan pyramidin tilavuus.



Pyramidin korkeus lasketaan suorakulmaisesta kolmiosta, jonka toisen kateetin pituus on puolet pohjaneliön sivun pituudesta.

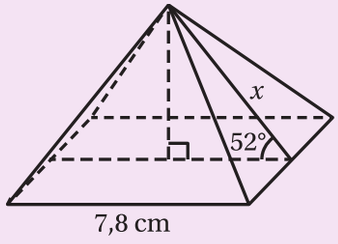
$$\tan 52° = \frac{h}{3{,}9}$$

$$h \approx 4{,}992 \text{ (cm)}$$

Pyramidin tilavuus on

$$V = \frac{Ah}{3} \approx \frac{7{,}8^2 \cdot 4{,}992}{3} \approx 100 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Lasketaan edellisen pyramidin vaipan pinta-ala.



Pyramidin vaippakolmion korkeus x voidaan ratkaista samasta kolmiosta, josta ratkaistiin pyramidin korkeus.

$$\cos 52° = \frac{3{,}9}{x}$$

$$x \approx 6{,}335 \text{ (cm)}$$

Yhden vaippakolmion pinta-ala on

$$\frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 6{,}335$$

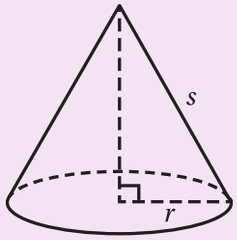
ja koko vaipan pinta-ala

$$4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7{,}8 \cdot 6{,}335 \approx 99 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

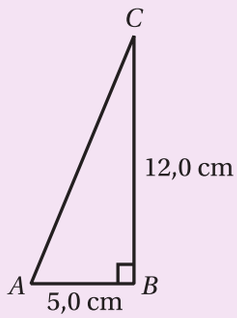
Suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala lasketaan kaavalla

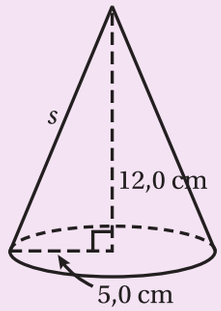
$A = \pi rs$,

missä r on kartion pohjaympyrän säde ja s kartion sivujana.



Kun suorakulmainen kolmio ABC pyörähtää kateetin BC ympäri, rajautuu suoran ympyräkartion muotoinen kappale. Kartion sivujanan pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseella.





$s^2 = 5{,}0^2 + 12{,}0^2$

$s = 13$ tai $s = -13$

Sivujanan pituus on 13 cm, ja kartion vaipan pinta-ala on

$A = \pi rs = \pi \cdot 5{,}0 \cdot 13 \approx 200\ (\text{cm}^2)$.

Pallo

Pallon tilavuus lasketaan kaavalla

$$V = \frac{4\pi r^3}{3},$$

missä r on pallon säde.

Pallon pinta-ala lasketaan kaavalla

$$A = 4\pi r^2.$$

Lasketaan, kuinka suureksi pallon muotoisen ilmapallon läpimitta tulee, kun palloon pumpataan 10 litraa ilmaa.

Tilavuus 10 litraa ilmaistaan kuutiomittoina.

$$10\,\text{l} = 10\,\text{dm}^3$$

Ratkaistaan pallon säde r (dm).

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 10$$

$$r \approx 1{,}337\ (\text{dm})$$

Ratkaisu symbolisella laskimella.

Yhtälö voidaan ratkaista myös kuutiojuuren avulla.

$$\frac{4\pi r^3}{3} = 10 \qquad | \cdot 3$$

$$4\pi r^3 = 30 \qquad | : (4\pi)$$

$$r^3 = \frac{30}{4\pi}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{30}{4\pi}} \approx 1{,}337\ (\text{dm})$$

Pallon läpimitta on

$$2r = 2 \cdot 1{,}337\ \text{dm} \approx 2{,}7\ \text{dm}$$

eli 27 cm.

Jos pallon muotoisessa ilmapallossa on 10 litraa ilmaa, niin edellisten laskujen mukaan pallon säde $r \approx 1{,}337$ dm. Pallon pinta-ala on

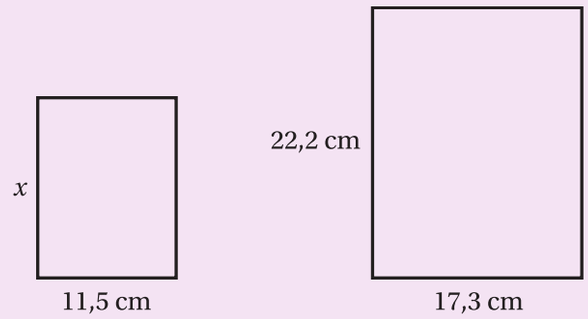
$$A = 4\pi r^2 = 4 \cdot \pi \cdot 1{,}337^2 \approx 22\ (\text{dm}^2).$$

KERTAUSTEHTÄVIÄ

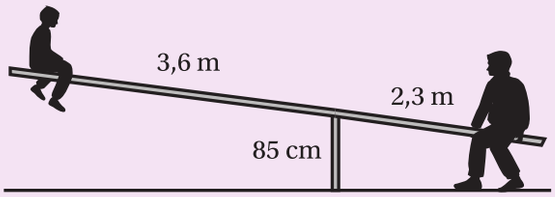
Tehtävät ovat edellä olevan kertauksen otsikoiden mukaisesti järjestettyjä perustehtäviä.

Yhdenmuotoisuus

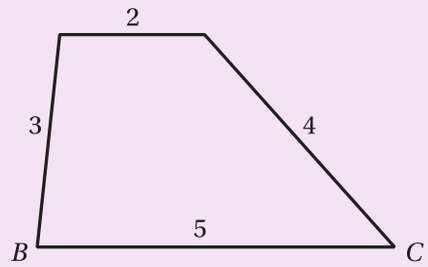
348. Paperiarkit ovat yhdenmuotoiset. Määritä pienemmän arkin korkeus x.



349. Kuinka korkealle keinulauta nostaa
a) lapsen **b)** aikuisen?



350. Kuvion puolisuunnikkaan erisuuntaisia sivuja jatketaan, kunnes jatkeet leikkaavat toisensa. Olkoon leikkauspiste A. Laske janojen AB ja AC pituudet.



351. Omakotitalon 8,0 metrin pituisen seinän maalaamiseen kului 36 litraa maalia. Kuinka paljon maalia tarvitaan yhdenmuotoiseen 3,5 metriä pitkään pihamökin seinään?

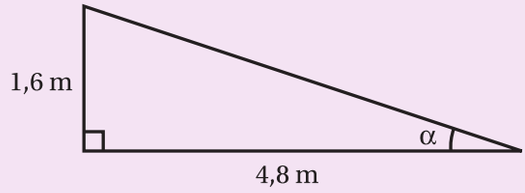
352. Lippiksen kokonumero ilmaisee lakin halkaisijan pituuden tuumina. Erään lippismallin pienin kokonumero on $6\frac{7}{8}$ ja suurin 8. Kuinka monta prosenttia vähemmän kangasta tarvitaan pienimpään lippikseen kuin suurimpaan?

353. Kartalla, jonka mittakaava on 1 : 50 000, suon pituus on 5,7 cm ja pinta-ala 13 cm^2. Mikä on suon
a) pituus **b)** pinta-ala?

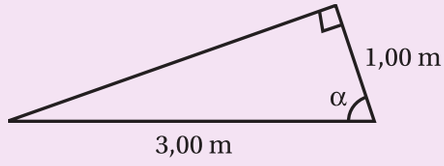
Tangentti, sini ja kosini

354. Suorakulmaisessa kolmiossa ABC kateetin AB pituus on 7,5 cm ja kulman A suuruus 16°. Laske kolmion muiden sivujen pituudet.

355. Kuinka suuri kulma α on?
a)



b)



356. Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 3,9 cm ja 6,3 cm. Kuinka suuri kolmion pienempi terävä kulma on?

357. Suomen rautateiden nopeimmilla rataosuuksilla nousun kaltevuuskulma saa olla korkeintaan $0{,}5°$. Kuinka pitkällä rataosuudella voidaan nousta 250 metriä?

358. Säännöstellyssä järvessä matalan ja korkean veden suurin korkeusero on $1{,}2$ m. Ranta viettää tasaisesti $6{,}2°$:n kulmassa. Kuinka pitkä laiturin tulee olla, jotta se ei koskaan peittyisi veden alle ja jotta sen päästä pääsisi aina suoraan veteen?

359. Laske asteen kymmenesosan tarkkuudella, missä kulmassa koordinaatiston pisteitä $A(1, 1)$ ja $B(2, 5)$ yhdistävä jana näkyy pisteestä $P(3, 2)$.

360. Kolmion kahden sivun pituudet ovat $7{,}2$ cm ja $3{,}1$ cm, ja näiden sivujen välisen kulman suuruus on $77°$. Kuinka suuri kolmion pinta-ala on?

361. Tasakylkisen kolmion huippukulman suuruus on $76{,}2°$ ja kylkien pituus $18{,}6$ cm. Määritä kolmion
a) kannan pituus
b) pinta-ala.

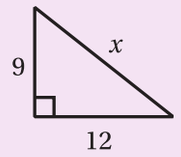
362. Kuinka korkealla laskeutuva $37{,}8$ m pitkä lentokone on, kun se juuri yläpuolella ollessaan näkyy $13°$:n kulmassa?

363. Säännöllisen yhdeksänkulmion sivujen pituus on $7{,}0$ cm. Kuinka suuri yhdeksänkulmion pinta-ala on?

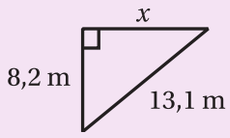
Pythagoraan lause

364. Laske tuntemattoman sivun pituus.

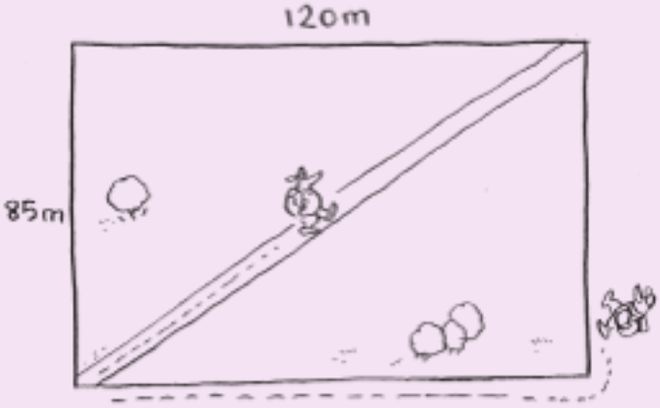
a)



b)



365. Kuinka paljon oikopolku lyhentää matkaa?



366. Purje on muodoltaan tasakylkinen kolmio, jonka kylkien pituudet ovat $3{,}2$ m ja kannan pituus $2{,}6$ m. Kuinka suuri purjeen pinta-ala on?

367. Koordinaatistoon on merkitty pisteet $A = (9, -4)$ ja $B = (10, 3)$.
a) Kumpi pisteistä A ja B on lähempänä origoa?
b) Mikä pisteiden A ja B etäisyys on?

368. Kellarikomeroon, jonka lattian pituus on $1{,}60$ m ja leveys $2{,}45$ m, rakennetaan 65 cm:n syvyinen hyllykkö. Kuinka leveä hyllykkö saa olla, jotta sen voisi tarvittaessa työntää lattiaa pitkin seinältä toiselle?

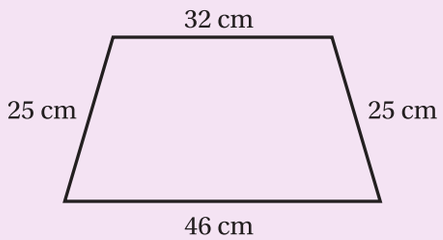
Suunnikas ja puolisuunnikas

369. Suunnikkaan kahden vastakkaisen sivun pituus on 11,9 cm ja etäisyys 5,2 cm. Laske suunnikkaan pinta-ala.

370. Suunnikkaan sivujen pituudet ovat 6,1 m ja 3,9 m, ja suunnikkaan tylppien kulmien suuruus on 155°. Kuinka suuri suunnikkaan pinta-ala on?

371. Puolisuunnikkaan yhdensuuntaisten sivujen pituudet ovat 6,0 m ja 9,0 m. Yhdensuuntaisten sivujen etäisyys on 5,0 m. Kuinka suuri puolisuunnikkaan pinta-ala on?

372. Laske kuvion tasakylkisen puolisuunnikkaan pinta-ala.



373. Koordinaatistoon piirretyn kolmion ABC kärkipisteet ovat $A(0, 3)$, $B(6, 0)$ ja $C(3, 4)$. Laske kolmion ABC pinta-ala.

Ympyrä

374. Ympyrään, jonka säde 9,5 cm, on piirretty 15,0 cm:n pituinen jänne.
a) Mikä on jänteen etäisyys ympyrän keskipisteestä?
b) Kuinka suuri on jänteen päätepisteisiin piirrettyjen säteiden välinen kulma?

375. Kaapelirullalla, jonka halkaisija on 56 cm, on jäljellä viisi kierrosta kaapelia. Kuinka monta metriä kaapelia rullalla on?

376. Ympyrän säde on 12,8 cm.
a) Laske 115°:n keskuskulman rajaaman kaaren pituus.
b) Ympyrän kehältä halutaan erottaa 32,1 cm pitkä kaari. Kuinka suuri kaaren keskuskulma on?

377. Puunrungon ympärysmitta on 4,7 m. Kuinka suuri rungon poikkileikkauksen pinta-ala on?

378. Kuinka pitkä aita tarvitaan 2 300 m^2:n suuruisen ympyrän muotoisen alueen rajaamiseen?

379. Kalastusalue ulottuu 15 km:n päähän saaresta sektorissa, jonka keskuskulma on 17°. Kuinka suuri kalastusalueen pinta-ala on?

380. Ympyrän säde on 4,5 m. Laske ympyrän sen segmentin pinta-ala, jota rajoittavat 78°:n keskuskulman kylkien rajaama kaari ja kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne.

Ympyrän tangentti

381. Kuinka kauas merelle näkee purjeveneen mastosta 18 m:n korkeudelta?
(Maapallon säde on 6 370 km.)

382. Ympyrän säde on 4,12 cm. Pisteestä P, jonka etäisyys ympyrän keskipisteestä on 9,06 cm, on piirretty ympyrälle tangentit. Kuinka suuri sivuamispisteisiin piirrettyjen ympyrän säteiden välinen kulma on?

383. Pallon muotoisen ilmapallon läpimitta on 78 cm. Mikä karanneen ilmapallon etäisyys katsojasta on silloin, kun pallo näkyy Kuun kokoisena eli 0,52°:n kulmassa?

384. Kuinka korkealle tulee nousta Utsjoella sijaitsevan Suomen pohjoisimman kohdan yläpuolelle, jotta näkisi Manner-Suomen eteläisimmän kohdan 1 160 kilometrin päässä Hangossa? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

Lieriö

385. Laatikon pituus on 22,5 cm, leveys 18,0 cm ja korkeus 12,6 cm.
a) Laske laatikon tilavuus litroina.
b) Kuinka pitkä ohut suora sauva mahtuu laatikkoon?

386. Uima-altaan vaakasuoran pohjan pinta-ala on 25 m^2 ja veden syvyys 1,7 m. Kuinka kauan kestää altaan täyttäminen vesihanasta, josta valuu 15 litraa vettä minuutissa?

387. Karille ajaneen säiliöaluksen koko 30 000 m^3:n suuruinen öljylasti valui mereen ja levittäytyi 0,5 mm:n paksuiseksi kerrokseksi. Kuinka suuri vesialue saastui?

388. Vesikerroksen korkeus suoran ympyrälieriön muotoisessa sadevesitynnyrissä on 25 cm. Tynnyrin pohjan halkaisija on 70 cm. Kuinka monta litraa vettä tynnyrissä on?

389. Kupariputken ulkohalkaisija on 50 mm ja seinämän paksuus 4,0 mm. Kuinka paljon 1,0 m:n mittainen putken pätkä painaa? Kuparin tiheys on 8 900 kg/m^3.

390. Pahviarkki, jonka mitat ovat 30,0 cm × 50,0 cm voidaan taivuttaa suoran ympyrälieriön vaipaksi kahdella tavalla. Laske näin saatavista lieriöistä korkeamman tilavuus.

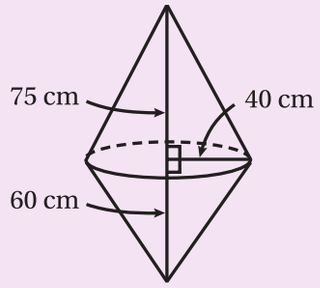
391. Pellistä valmistetaan litran vetoinen suoran ympyrälieriön muotoinen kanneton mittaastia, jonka pohjan halkaisija on 10,0 cm. Kuinka paljon peltiä astiaan tarvitaan?

392. Suoran ympyrälieriön muotoisen makeistölkin tilavuus on 2,0 dl ja korkeus 9,4 cm. Kuinka paljon pahvia tarvitaan tölkin vaippaan?

Kartio

393. Vuotavan säiliön alle valuneet viljanjyvät muodostavat likipitäen kartion muotoisen keon. Keon korkeus on 1,8 m, ja keko peittää 13 m^2:n suuruisen maa-alueen. Kuinka paljon viljaa säiliöstä on valunut?

394. Laske poijun tilavuus.



395. Teltta on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Teltan korkeus on 1,90 m ja pohjaneliön sivun pituus 2,34 m.
a) Kuinka suuri teltan tilavuus on?
b) Kuinka paljon kangasta tarvitaan teltan kattoon?

396. Katto, jonka korkeus on 6,4 m, on muodoltaan säännöllinen nelisivuinen pyramidi. Katon lappeiden kaltevuuskulma on 25°.
a) Kuinka suuri katon rajoittama tilavuus on?
b) Kuinka paljon kuparilevyä tarvitaan katon päällystämiseen?

397. Vappuhattu on muodoltaan suora ympyräkartio. Hatun pohjan halkaisijan pituus on 24 cm ja hatun korkeus on 45 cm. Kuinka paljon pahvia hattuun on tarvittu?

Pallo

398. Helsinki ja Botswanan pääkaupunki Gaborone sijaitsevat samalla pituuspiirillä. Helsingin leveyspiiri on 60° pohjoista leveyttä ja Gaboronen 25° eteläistä leveyttä. Kuinka pitkä matka Helsingistä on Gaboroneen? Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

399. Helsinki ja Alaskan Anchorage sijaitsevat samalla leveyspiirillä 60° pohjoista leveyttä täsmälleen maapallon vastakkaisilla puolilla. Kuinka pitkä matka on Helsingistä Anchorageen, jos matka tehdään

a) kulkemalla koko ajan itään

b) lähtemällä Helsingistä pohjoiseen ja kulkemalla koko ajan suoraan

c) lähtemällä Helsingistä etelään ja kulkemalla koko ajan suoraan?

Maapallon ympärysmitta on 40 000 km ja säde 6 370 km.

400. Kuplahalli on muodoltaan puolipallo, jonka halkaisija on 17 m.

a) Laske hallin tilavuus.

b) Kuinka paljon muovia tarvitaan hallin kattoon?

401. Jalkapallon ympärysmitta on sääntöjen mukaan 71 cm (28 tuumaa). Kuinka suuri jalkapallon tilavuus on?

402. Muovailuvaha on pakkauksessa suorakulmaisen särmiön muotoisena kappaleena, jonka mitat ovat 12,0 cm, 6,0 cm ja 4,0 cm. Vaha muovataan palloksi.

a) Kuinka suuri pallon läpimitta on?

b) Kuinka monta prosenttia kappaleen pinta-ala suurenee tai pienenee?

TEHTÄVÄSARJOJA

Sarjat ovat vaativuusjärjestyksessä niin, että sarja A on helpoin.

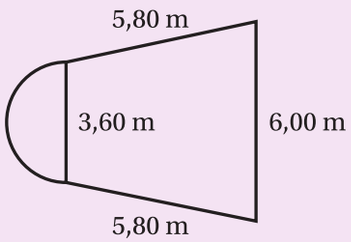
Sarja A

1. Keinulauta, jonka pituus on 6,0 m, on 80 cm korkealla pukilla. Kuinka keinulaudan tukipiste tulee valita, jotta laudan toinen pää ylhäällä ollessaan olisi 2,5 metrin korkeudessa?

2. Maan tasalta 17 metrin etäisyydeltä talon päädystä näkyy talon harja 22°:n korkeudella ja päätyyn talon harjalle kiinnitetyn televisioantennin huippu 32°:n korkeudella. Kuinka pitkä antenni on?

3. Veden syvyys veneen ankkuripaikalla on 27 m. Ankkuriköyden pituus on 36 m. Kuinka suurella alueella vene ajelehtii?

4. Koripallokentän vapaaheittoalue muodostuu puoliympyrästä ja tasakylkisestä puolisuunnikkaasta. Laske vapaaheittoalueen pinta-ala.



5. Kuution muotoisen astian särmien pituus on 10,0 cm. Astian pohjalle asetetaan pallon muotoinen juusto, jonka halkaisija on 9,0 cm, ja astiaan kaadetaan suolavettä, kunnes juusto peittyy. Kuinka paljon suolavettä vähintään tarvitaan?

6. Ympyrän muotoisen uima-altaan halkaisija on 15,0 m. Allas ympäröidään joka kohdasta yhtä leveällä laatoituksella. Kuinka leveä laatoituksesta tulee, kun laattoja on käytettävissä 125 m^2?

Sarja B

1. Laidunalue on muodoltaan kolmio. Karttakuvassa kolmion kärjet ovat kartan koordinaatiston pisteissä (1, 2), (4, 1) ja (5, 5). Koordinaatiston yksikkö vastaa 50 metriä luonnossa.
a) Kuinka pitkä laidunta kiertävä aita on? Anna vastaus kymmenen metrin tarkkuudella.
b) Kuinka suuri laitumen pinta-ala on? Anna vastaus hehtaareina 0,1 hehtaarin tarkkuudella.

2. Ympyrän muotoista piha-aluetta ympäröi 8,0 m korkea muuri. Kun aurinko laskee alle 12°:n korkeudelle, piha-alue peittyy kokonaan varjoon. Kuinka suuri pihan pinta-ala on?

3. Eräät lentoyhtiöt noudattavat käsimatkatavaran suhteen ns. 115 senttimetrin sääntöä: käsimatkatavarana voi kuljettaa suorakulmaisen särmiön muotoista esinettä, jonka pituuden, leveyden ja korkeuden summa ei ylitä 115 senttimetriä. Määritä muut mitat mahdollisimman tilavalle 33 cm korkealle neliöpohjaiselle laukulle. Mahtuuko laukkuun 63 cm:n pituinen suorakahvainen sateenvarjo?

4. Kun lieriön muotoiseen astiaan kaadettiin 5,0 litraa vettä, vedenpinta astiassa nousi 6,4 cm. Kun astiaan upotettiin metallipallo, vedenpinta nousi vielä 2,0 cm. Kuinka pitkä pallon säde on?

5. Pöydälle on asetettu neljä samankokoista kuutiota, jotka koskettavat toisiaan särmistä niin, että kuutioiden keskelle jää samankokoisen kuution muotoinen tyhjä tila. Kuutioiden särmän pituus on 8,0 cm. Kuutioiden varaan, tyhjän tilan päälle, asetetaan pallo, jonka halkaisija on 10,0 cm. Laske syntyvän rakennelman korkeus.

6. Säännöllisen nelisivuisen pyramidin sivutahkot ovat tasakylkisiä kolmioita, joiden huippukulman suuruus on 72,0° ja kannan pituus 17,2 cm. Laske pyramidin tilavuus.

Sarja C

1. Aamupäivällä taivallettiin länteen ja iltapäivällä kolminkertainen matka pohjoiseen. Näin päädyttiin 15 kilometrin etäisyydelle lähtöpaikasta. Kuinka pitkä matka oli taivallettu?

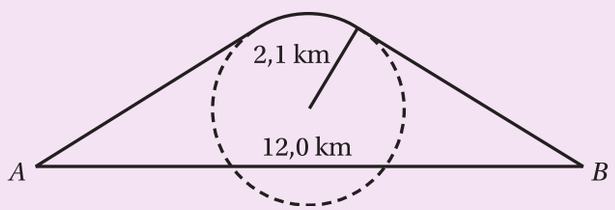
2. Karsittu puun runko on muodoltaan suora ympyräkartio. Rungon pituus on 12 m ja läpimitta tyvessä 64 cm. Rungosta sorvataan mahdollisimman pitkä 24 cm:n paksuinen suoran ympyrälieriön muotoinen pylväs.
a) Kuinka pitkä pylväs rungosta saadaan?
b) Kuinka monta prosenttia pylvään tilavuus on puunrungon tilavuudesta?

3. Maalari Albrecht Dürer (1471–1528) antoi seuraavan käytännön ohjeen piirtää säännöllinen seitsenkulmio ympyrän sisään: ”Sisään piirretyn säännöllisen seitsenkulmion sivu on puolet sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivusta.” Kuinka paljon ja mihin suuntaan ohjeen mukaisesti piirretty seitsenkulmion sivu poikkeaa oikeasta pituudesta silloin, kun ympyrän säteen pituus on 1,00 m? Anna vastaus millimetrin kymmenesosan tarkkuudella.

4. Sydney ja Buenos Aires sijaitsevat samalla leveyspiirillä 35° eteläistä leveyttä. Sydney sijaitsee pituuspiirillä 151° itäistä pituutta ja Buenos Aires pituuspiirillä 58° läntistä pituutta. Kuinka pitkä matka on Sydneystä Buenos Airesiin, jos
a) kuljetaan itään pitkin 35. eteläistä leveyspiiriä
b) matka tehdään kulkemalla ensin suoraan etelänavalle ja sieltä suoraan Buenos Airesiin?
Maapallon ympärysmitta on 40 000 km.

5. Lomahotellin esitteen mukaan hotelli sijaitsee omalla pienellä hiekkarantaisella saarellaan, jolta venematka golfkentälle on 12 km kaakkoon ja lentokentälle 28 km etelään. Mikä on golfkentän etäisyys lentokentästä?

6. Paikkojen A ja B etäisyys on 12,0 km. Rautatie A:sta B:hen muodostuu kahdesta yhtä pitkästä suorasta osuudesta ja kaarteesta, jossa rata kääntyy 64° pitkin ympyrän kaarta. Ympyrän säde (kaarteen ns. kaarevuussäde) on 2,1 km. Laske rautatien pituus.



VASTAUKSET

Kuvioiden yhdenmuotoisuus

1. $\alpha = \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBA$. Kulmaa α ei voida merkitä yhdellä kirjaimella, koska α ei ole kuvion ainoa kulma, jonka kärki on pisteessä B.
$\beta = \sphericalangle C = \sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle DCB = \sphericalangle DCA$

2. **a)** $\sphericalangle E$ ja $\sphericalangle G$
b) FG ja EH
c) $\frac{3}{2} = 1{,}5$

3. **a)** 12,7 m
(Jos sivun AB pituus metreinä on x, niin $\frac{x}{7{,}4} = \frac{12{,}0}{7{,}0}$.)
b) 5,4 m
c) 73°
(Kulma $C'D'A'$ on kulman CDA vastinkulma.)

4. **a)** 6,1 cm **b)** 19,9 cm

5. **a)** 4,4 km **b)** 130 km
(Koska tehtävän mittaluku 8,7 cm on annettu kahden numeron tarkkuudella, myös vastaus annetaan tavallista tarkkuussääntöä noudattaen kahden numeron tarkkuudella: a-kohdassa 435 000 cm ≈ 440 000 cm = 4 400 m = 4,4 km, b-kohdassa 13 050 000 cm ≈ 13 000 000 cm = 130 km.)

6. **a)** 55,5 cm
(Jos x on etäisyys kartalla kilometrinä, niin $\frac{x}{111\text{ km}} = \frac{1}{200\,000}$. Jotkin laskimet näyttävät tuloksen kymmenpotenssimuodossa: $x = \frac{111\text{ km}}{200\,000} = 5{,}55 \cdot 10^{-4}$ km. Luku 10^{-4} on yksi kymmenestuhannesosa, $10^{-4} = 0{,}0001$.
Siis $5{,}55 \cdot 10^{-4}$ km = 0,000555 km = 0,555 m.)
b) 4,6 cm

7. 0,28 mm

8. **a)** 11,3 m
(Rakennuksen korkeuden suhde leveyteen on kuvassa ja todellisuudessa yhtä suuri.
Siis jos x on rakennuksen korkeus metreinä, niin $\frac{x}{24{,}0} = \frac{5{,}4}{11{,}5}$.)
b) 3,5 m

9. 30,8 cm
(Jos arkin pitemmän sivun pituus senttimetreinä on x, niin leikatun osan lyhyempi sivu on $\frac{x}{3}$. Verranto voidaan muodostaa esimerkiksi seuraavasti: koko arkissa ja leikatussa osassa lyhyemmän sivun suhde pitempään on yhtä suuri.)

10. 19 m

11. 1 : 5 600 000

12. 35 cm

13. **a)** 6,2 cm **b)** 5,6 cm

14. **a)** Ovat.
b) Eivät ole.
c) Eivät ole.
d) Eivät ole.
(Kolmio on tasakylkinen, jos siinä on kaksi yhtä pitkää sivua.)
e) Ovat.
(Kolmio on tasasivuinen, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat myös yhtä suuret. Jokaisen kulman suuruus on 60°.)
f) Ovat.

15. 1,5 cm

16. 1,40 mm
(Vastauksessa on kolmen numeron tarkkuus kuten tehtävän mittaluvussa 21,0 cm.)

17. alueen mitat $9{,}90\text{ km} \times 9{,}90\text{ km}$,
pinta-ala $98{,}0\text{ km}^2$

18. 1 : 50 000

19. 180 m
(Pellon pituuden suhde sähköpylväiden etäisyyteen on yhtä suuri luonnossa ja kuvassa.)

20. 75,2 cm
(Halkaisijan pituutta ei välttämättä tarvitse muuttaa senttimetreiksi, sillä leveyksien suhde on yhtä suuri kuin halkaisijoiden suhde.)

21. 31 cm

22. joko keskeltä tai 4 cm:n päästä reunasta

Kolmioiden yhdenmuotoisuus

23. 18 m

24. 32 m

25. 3,1 cm $\left(\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}\right)$

26. 34 m
(Janan CD vastinjana kolmiossa ABC on jana BC.)

27. 17 m
(Silmästä kynän päiden kautta puun tyveen ja latvaan kulkevat näkösäteet rajaavat kynän ja puun kanssa kolmiot. Koska kynä ja puu ovat yhdensuuntaiset, kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Etäisyydet kynästä ja puusta (kolmioiden korkeudet) ovat vastinosia.)

28. $\frac{65}{12} = 5\frac{5}{12}$ ja $\frac{169}{12} = 14\frac{1}{12}$
(Vastaus voidaan antaa murtolukuna tai sekalukuna.)

29. 58 cm:n korkeudelle

30. 4,2 m
(Yhdenmuotoisten kolmioiden toisiaan vastaavien korkeuksien suhde on yhtä suuri kuin vastinsivujen pituuksien suhde.)

31. $\frac{12}{7} = 1\frac{5}{7}$
(Ylös rajautuu koko kolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio.)

32. **a)** 3,0 metrin korkeudella
b) 3,0 metrin korkeudella
(Voidaan osoittaa, että kohtaamiskorkeus ei riipu pylväiden etäisyydestä.)

33. 96 m

34. 40 m $\left(\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}\right)$

35. 3,5 km tiestä T_1 ja 5,5 km tiestä T_2
(Pisteen P kautta piirretään kohtisuora suorille T_1 ja T_2, jolloin muodostuu kaksi keskenään yhdenmuotoista suorakulmaista kolmiota.)

36. 44 cm:n korkeudella
(Kolmioiden korkeuksien suhde on yhtä suuri kuin vastinsivujen pituuksien 50 cm ja 30 cm suhde.)

37. 7,5 m

38. **a)** 10 cm
b) vähintään 2,8 metrin etäisyydellä
(Vastaus on pyöristetty normaaleilla pyöristyssäännöillä. Laskettu tulos on vähimmäisetäisyyden likiarvo, joten käytännön tilanteessa se ei mahdollisesti ole riittävä.)

39. $\frac{80}{13} = 6\frac{2}{13}$

40. Ei voida.
(Tornista havaittaisiin vasta yli 180 cm pitkä henkilö. Ratkaistaan ensin, kuinka lähelle muuria näkökenttä ulottuu.)

41. $\frac{28}{11} = 2\frac{6}{11}$
(Kuvioon muodostuu kaksi pienempää suorakulmaista kolmiota, jotka ovat molemmat yhdenmuotoisia koko kolmion kanssa ja myös keskenään.)

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde

42. **a)** yhdeksänkertaiseksi
b) satakertaiseksi

43. $\frac{1}{9}$ (Yhdenmuotoisuussuhteen $\frac{1}{3}$ neliö.)

44. 43,0 %

45. 7,2 dm^2
(Tarvittavat nahanpalat ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{10{,}5}{8}$.)

46. 74 hehtaaria
(1 ha = 10 000 m^2. Pinta-alan yksiköt ovat liitteessä sivulla 167.)

47. 60 cm^2

48. **a)** 40 % **b)** 96 %

49. $\frac{7}{9} \approx 77{,}8\ \%$
(Pikkuympyrän halkaisijan suhde ison ympyrän halkaisijaan on $\frac{1}{3}$.)

50. 50 cm
(Merkitään vastinsivun pituutta esimerkiksi x. Pinta-alojen suhde on yhtä suuri kuin vastinsivujen pituuksien suhteen neliö.)

51. **a)** 60 cm^2
b) 13 senttimetrin päästä kärjestä A

52. $\frac{9}{4}$

53. 38,1 %

54. 4,3 dm^2

55. 19 aaria

56. Pinta-ala on 8,43 m^2, tarvitaan vähintään 11 karttalehteä.

57. **a)** 40 % **b)** 16 %

58. 24 %
(Ilmanvastusten suhde on yhtä suuri kuin kehon poikkileikkauksien pinta-alojen suhde.)

59. 6,2 m leveä

60. 518 m ja 987 m

Kulman tangentti, sini ja kosini

61. **a)** $\tan\alpha = \frac{s}{r}$
b) $\sin\alpha = \frac{s}{t}$
c) $\cos\beta = \frac{z}{x}$
d) $\tan\beta = \frac{y}{z}$

62. **a)** 4,7 m ($\sin 15° = \frac{x}{18}$ tai $\cos 75° = \frac{x}{18}$)
b) 1,8 m ($\tan 72° = \frac{5{,}4}{x}$)

63. 14 m

64. 5,1 km

65. 470 m

66. **a)** 21° $\left(\sin\alpha = \frac{2{,}9}{8{,}1}\right)$

b) 68° $\left(\cos\alpha = \frac{5{,}3}{14{,}2}\right)$

67. 21°

68. **a)** 71° ($\alpha + \beta$, missä $\tan\alpha = \frac{3}{4}$ ja $\tan\beta = \frac{2}{3}$)

b) 18°

69. 130 m

70. 140 m

71. **a)** suuntaan 135°

b) suuntaan 270°

c) suuntaan 145,4°

72. 12 kilometrin etäisyydellä

73. 16,5 m

74. 24 m
(Varjon päästä piirretään kohtisuora puun rungon jatkeelle ja ratkaistaan ensin maan alle muodostuvan suorakulmaisen kolmion kateetit.)

75. **a)** 18 m **b)** 6,8 cm

76. 16 m

77. 6,2 cm

78. 27°

79. 7,9°

80. 4,7°

81. $\sphericalangle A \approx 14°$, $\sphericalangle B \approx 132°$ ja $\sphericalangle C \approx 35°$
(Summaksi tulee 181° eikä 180°. Näin voi käydä, kun lasketaan kolmion kulmien suuruuksien likiarvojen summa.)

82. 23 m

83. 410 m

84. vähintään 6,1 cm

85. suuntaan 326°

86. 1,54 km
(Ratkaistaan ensin ensimmäisen katsomiskohdan maata pitkin mitattu etäisyys vuoresta.)

87. 13 m
(Varjon päästä piirretään kohtisuora puun rungolle ja lasketaan ensin alemman suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet.)

Trigonometrian käyttöä

88. 5,9 m

89. **a)** 63° **b)** 7,4 cm **c)** 27 cm^2

90. 17,5 cm

91. 17 cm^2

92. 17 ha

93. 1,0 km
(Janat katsojasta laivan keulaan ja perään ovat kyljet tasakylkisessä kolmiossa, jonka huippukulma on 9,8°. Laivan etäisyys on huipusta kannalle piirretty korkeus.)

94. 36,8°:n kulmassa

95. 5,1 m:n päässä tyvestä
(Muodostuvan tasakylkisen kolmion kantakulmien suuruus on 74°.)

96. 11,4 m
(Lasketaan ensin kärjestä A piirretyn korkeusjanan pituus.)

97. 15 km

98. 170 m

99. 68 m^2

100. huippukulma 44° ja kantakulmat 68°

101. 44 cm^2

102. 24 km^2

103. **a)** 1,4 m **b)** 3,1 m

104. keskikohdan kohdalta
(Näkökulmat ovat 43° ja 42°.)

105. 12 m
(Muodostuvan tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat 75°.)

106. **a)** 9,3 cm **b)** 16 cm^2

107. 7,2 km
(Lasketaan ensin majakan etäisyys luotsiasemaa ja laivaa yhdistävästä linjasta.)

Pythagoraan lause

108. **a)** 8,4 km (Yhtälö $x^2 = 4{,}1^2 + 7{,}3^2$.)
b) 5,0 m (Yhtälö $x^2 + 12{,}0^2 = 13{,}0^2$.)

109. 5,8 m

110. 4,3 m

111. yli 72 cm korkea

112. **a)** 5,8 cm
b) 25 cm^2
(Pinta-alaa laskettaessa on käytettävä a-kohdan tulosta tarkempaa korkeuden likiarvoa.)

113. **a)** $\sqrt{13} \approx 3{,}6$
(Jana AB on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateettien pituudet ovat 2 ja 3. Tarkka arvo $\sqrt{13}$ on varsinainen vastaus. Likiarvo lasketaan havainnollistukseksi.)
b) 17

114. 29 m ja 43 m
(Merkitään kentän sivuja $3x$ ja $2x$.)

115. 31 m

116. 77 cm:n korkeudelle

117. 54 cm ja 96 cm
(Jos toisen kateetin pituus on x, niin toisen kateetin pituus on $1{,}50 - x$.)

118. 17,4 km

119. 7,8 m
(Yhdenmuotoisista kolmioista nähdään, että tikkaiden alapää on 3,5 m:n etäisyydellä seinästä.)

120. 15,3 m
(Lasketaan ensin trigonometrian avulla kateettien pituudet suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusan pituus on 8,0 m ja jossa on terävä kulma 12°.)

121. 13,5 m
(Kuvioon täydennetään puun latvasta rungolle piirretty kohtisuora. Taittuneen osan pituus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateettien pituudet ovat $8 \cdot \cos 12°$ ja $5{,}0 - 8{,}0 \cdot \sin 12°$.)

122. **a)** 266 m **b)** 16

123. 4,9 m

124. 103 askeleen päähän

125. 2,7 metrin korkeuteen

126. 6,5 cm

127. 6,9 km
(Kolmion piiri on $3+\sqrt{41}+\sqrt{20}$ koordinaatiston yksikköä.)

128. leveys 110,7 cm ja korkeus 62,3 cm

129. Ei voida.
(Sängyn halkaisija 2,57 m on suurempi kuin huoneen leveys.)

130. 6,7 cm

131. matka 22 km, nopeus 3,2 km/h
(Laskussa käytettiin annettua tulosta tarkempaa matkan likiarvoa 22,4 km.)

132. 7,6 cm ja 12,6 cm

133. 6,8 km paikasta C

134. 10,2 km
(Yhdenmuotoisista kolmioista nähdään, että yhdystie kohtaa ensimmäisen päätien 6,4 km:n etäisyydellä risteyksestä.)

135. 16,6 km

Monikulmiot, suunnikas ja puolisuunnikas

136. Yksi, sillä jos nelikulmiossa olisi kaksi 180°:n kulmaa, niin kulmien summa olisi yli 360°.

137. Kulmien summa on 1 080° $(6 \cdot 180°)$. Jos kulmat ovat yhtä suuret, niiden suuruus on 135°.

138. 14 cm^2

139. 22 cm^2

140. 14 cm^2

141. **a)** 2,2 m
b) 8,0 m^2
(Pinta-alaa laskettaessa on käytettävä a-kohdan vastausta tarkempaa korkeuden likiarvoa.)

142. **a)** 16 cm
(Kun piirretään 32 cm:n pituisen sivun päistä korkeusjanat, päätyihin rajautuu samanlaiset suorakulmaiset kolmiot, joiden toisen kateetin pituus on $\frac{56\text{ cm}-32\text{ cm}}{2}=12\text{ cm}$.)
b) 700 cm^2

143. 5
(Suorakulmion pinta-alasta $3 \cdot 4 = 12$ vähennetään kolmioiden pinta-alat $2+3+2=7$.)

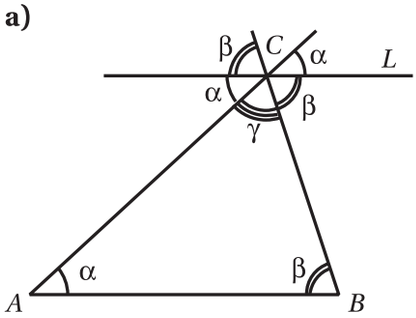
144. 40 ha
(Koordinaatiston kolmio kehystetään suorakulmiolla, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kolmion pinta-ala ruutuina saadaan, kun nelikulmion pinta-alasta $6 \cdot 8 = 48$ vähennetään kolmen kolmion pinta-alat $4+24+6$ ja neliön pinta-ala 4. Koordinaatiston yhden ruudun pinta-ala vastaa luonnossa neljää hehtaaria.)

145. $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 65°,\ \sphericalangle C = 115°$

146. 33 cm^2

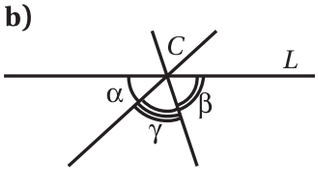
147. **a)** neljäkäs
b) 3 600 cm^2
(Neljän samanlaisen suorakulmaisen kolmion pinta-alojen summa.)

148. **a)**



Koska suora L on yhdensuuntainen sivun AB kanssa, kuvioon muodostuu yhtä suuria samankohtaisia kulmia.

b)



Suoran L alapuolella piste C kärkenä ovat kulmat α, β ja γ. Kuviosta näkyy, että $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

149. **a)** 1 440° $(8 \cdot 180°)$

b) 144°

150. **a)** Enintään kaksi, sillä kolmen yli 180°:n kulman summa olisi suurempi kuin viisikulmion kulmien summa 540°.

b) Enintään kolme, sillä neljän suorakulman summa olisi 360°, jolloin viides kulma olisi oikokulma (180°), mikä on mahdotonta.

151. **a)** 6,5 cm^2 **b)** 10 cm^2

152. 23 m^2

153. 280 000 km^2

(Nevadan todellinen pinta-ala on 286 180 km^2.)

154. 23 m^2

155. 7

(Kolmio ympäröidään suorakulmiolla, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Kolmion pinta-ala on suorakulmion pinta-ala $5 \cdot 4 = 20$ vähennettynä kolmen kolmion pinta-alojen summalla $5 + 2 + 6 = 13$.)

156. 97 m^2

(Puolisuunnikkaiden korkeus on 4,00 m ja kolmioiden korkeus noin 3,57 m.)

157. 17

(Nelikulmio ympäröidään suorakulmiolla, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Nelikulmion pinta-ala saadaan, kun suorakulmion pinta-alasta 36 vähennetään neljän kolmion pinta-alat $2 + 6 + 4 + 3$ ja yhden neliön pinta-ala 4.)

158. terävät kulmat 44°, tylpät kulmat 136°

(Terävälle kulmalle on $\sin\alpha = \frac{4{,}2}{6{,}1}$.)

159. 90° $(180° - (25° + 65°))$

160. Syntyy neljäkäs. Pinta-ala on 48 cm^2.

161. **a)** 9

(Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{h-3}{h} = \frac{10}{15}$.)

b) $67\frac{1}{2} = 67{,}5$

(Tehtävän luvut ovat tarkkoja arvoja, joten vastausta ei pyöristetä.)

Ympyrä ja säännölliset monikulmiot

162. Lahti, Hartola, Hämeenlinna, Riihimäki, Kerava, Porvoo, Loviisa ja Kouvola

(Piirretään kartalle ympyrä, jonka keskipiste on Lahti ja säde 2,5 cm.)

163. **a)** 38,5°

b) 9,99 cm

(Jänteen puolikas ratkaistaan suorakulmaisesta kolmiosta.)

164. 170 cm^2
(Tasakylkinen kolmio, jonka kanta on 48 cm ja jonka kannalle piirretty korkeus ratkaistaan Pythagoraan lauseella.)

165. 44 cm

166. **a)** tasasivuinen kolmio
b) neliö

167. 3,129

168. 18 cm
(Parrun neliön muotoisen poikkileikkauksen lävistäjä on tukin poikkileikkausympyrän halkaisija. Neliön sivun pituuden x voi ratkaista trigonometrisesti tai Pythagoraan lauseella.)

169. 110 cm^2
(Viisi tasakylkistä kolmiota, joiden kanta on 8,0 cm ja huippukulma 72°.)

170. ympyrän sisällä
(Pisteen $(9, 6)$ etäisyys origosta on $\sqrt{117} \approx 10{,}8$. Koska etäisyys on pienempi kuin säde, piste on ympyrän sisäpuolella.)

171. 10
(Jänteen etäisyys yhteisestä keskipisteestä saadaan Pythagoraan lauseella. Etäisyys on 8. Pienemmän ympyrän säde saadaan edelleen Pythagoraan lauseella.)

172. 140 km:n etäisyydellä
(Laivan reitti muodostaa A keskipisteenä piirretyn ympyrän 80 km pitkän jänteen. Lasketaan ensin jänteen keskipisteen etäisyys A:sta ja sitten B:stä.)

173. **a)** Kaikkien kulmien suuruus on 60°.
(Kolmio on tasasivuinen kolmio, jonka huippukulma on 60°.)
b) Kolmiot ovat tasasivuisia.
c) Erottamalla ympyrän kehältä harpin avulla kuusi säteen mittaista jännettä.
(b-kohdan perusteella ympyrän sisään piirretyn kuusikulmion sivut ovat ympyrän säteen mittaisia.)

174. 23,2 cm

175. 14 cm

176. 49,2°

177. 13,4 cm

178. 3,090
(20 tasakylkistä kolmiota, joiden kylki on 1 ja huippukulma 18°.)

179. 7,6 m

180. **a)** ympyrän ulkopuolella
(Pisteen etäisyys keskipisteestä on suurempi kuin ympyrän säde.)
b) ympyrällä

181. 50 km

Ympyrän kehän ja kaaren pituus

182. **a)** 47 mm **b)** 230 m

183. 46 m

184. 2,5 m

185. **a)** 40,1 cm $\left(\frac{2{,}52}{2\pi}\text{ m}\right)$
b) 1,2 m $\left(\frac{3{,}7}{\pi}\text{ m}\right)$

186. 260° $\left(\frac{\alpha}{360°} = \frac{9{,}3}{12{,}3}\right)$

187. 29 dm

188. **a)** 1,3 mm **b)** 75 mm **c)** 110 m

189. 800 m
(Suoran soutumatkan pituus on kaaren päätepisteitä yhdistävän jänteen pituus. Kaaren keskuskulma saadaan yhtälöstä $\frac{\alpha}{360°} = \frac{3{,}1}{7{,}5}$.)

190. **a)** $2r + \pi r$
b) 14,4 cm
(Ratkaistaan r yhtälöstä $2r + \pi r = 73{,}8$.)

191. **a)** 63 km **b)** 63 km **c)** 63 km
($2\pi(a + 10) - 2\pi a = 20\pi$. Siis erotus on aina $20\pi \approx 63$ (km).)

192. $\frac{\pi}{4} \approx 78{,}5\ \%$
(Ympyrän halkaisija on a ja ympyrän kehän pituus πa. Ympyrän kehän pituuden suhde neliön piiriin on $\frac{\pi a}{4a} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785$.)

193. **a)** 23 m **b)** 20,0 m

194. 600 kertaa

195. 8,75 m

196. 12 cm

197. 57°

198. **a)** 1 852 m **b)** 948 km

199. 3 700 km/h

200. 1,3 m
(Osoittimen kärki piirtää ympyrän, jonka kehän pituus on $12 \cdot 3 \cdot 23$ cm.)

201. 280 m
(Tunneli on maapallon poikkileikkausympyrällä 120 km:n pituisen kaaren päätepisteitä yhdistävä jänne. Lasketaan jänteen etäisyys keskipisteestä ja vähennetään etäisyys maapallon säteestä.)

202. 16 cm

203. 97,4 %
(Kahdeksankulmion piiri on $16r \cdot \sin 22{,}5°$ $\approx 6{,}1229r$. Piirin suhde ympyrän kehän pituuteen on noin $\frac{6{,}1229r}{2\pi r} = \frac{6{,}1229}{2\pi} \approx 0{,}974$. Koska r supistui pois, suhde ei riipu ympyrän koosta.)

Ympyrän ja sektorin pinta-ala

204. **a)** 38 cm^2 **b)** 125 m^2

205. 88 m^2 $(\pi \cdot 8{,}0^2 - \pi \cdot 6{,}0^2)$

206. **a)** 4,5 m
b) 29 m
(Ympärysmittaa laskettaessa on käytettävä a-kohdan tulosta tarkempaa säteen likiarvoa.)

207. 1 220 m^2
(Ensin lasketaan ympyrän säde $r = \frac{124}{2\pi}$.)

208. 80°

209. 50 m^2

210. 33 m^2
(Ratkaistaan ensin sektorin keskuskulma.)

211. 1 700 m^2

212. 2,6 m^2

213. 1,160 cm^2
(Neliön pinta-alasta vähennetään neljän neljänneskolikon eli yhteensä yhden kolikon pinta-ala.)

214. 22 m
(Alue muodostuu kahdesta neljännesympyrästä (yhteensä puoliympyrästä) ja suorakulmiosta.)

215. **a)** 15,8 m **b)** 18,0 m

216. $\frac{\pi}{4} \approx 78{,}5\ \%$
(Ympyrän säde on $\frac{a}{2}$ ja ympyrän pinta-ala on $\frac{\pi a^2}{4}$.)

217. 200 m^2:n alueella

218. suurempi pitsa
(Yhden neliösenttimetrin hinnaksi tulee pienemmässä pitsassa 0,0102 euroa ja suuremmassa 0,0099 euroa.)

219. **a)** 97 m^2 (Säde on $\frac{35}{2\pi}\ \text{m} \approx 5{,}570$ m.)
b) 43 m (Säde on noin 6,910 m.)

220. 36 km^2

221. 53 m^2

222. **a)** 31 m^2 **b)** 82 m^2

223. 9 550 m^2

224. 4,2 m^2

225. 20,9 m
(Muuttujaksi x kannattaa valita puoliympyrän säde metreinä.)

226. 90,0 %
(Kahdeksankulmio muodostuu kahdeksasta tasakylkisestä kolmioista. Kahdeksankulmion pinta-ala on noin $2{,}8284r^2$.)

Ympyrän tangentti

227. 39° $\left(\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2{,}0}{6{,}0}\right)$

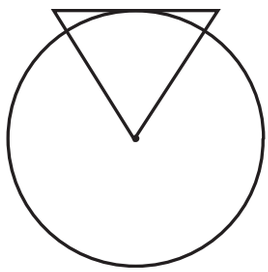
228. 4 500 km

229. 31 km:n päähän
(Voidaan laskea viivasuora etäisyys katsojan silmistä näkökentän etäisimpään kohtaan.)

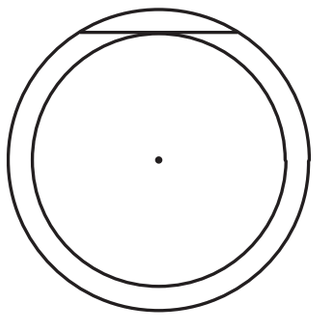
230. 5,9 m (Keskuskulman kosini on $\frac{5{,}0}{13{,}0}$.)

231. 2 300 km:n päähän
(Etäisyys on maapallon poikkileikkausympyrän kaaren pituus.)

232. vähintään 240 m korkeiksi
(Tornit ovat mahdollisimman matalia, kun näkösäde tornista torniin sivuaa maapalloa torneja yhdistävän maapallon poikkileikkausympyrän kaaren keskikohdassa. Tornien etäisyys 110 km on kaaren pituus.)



233. 15 min
(Aikana, jona avaruusasema on horisontin yläpuolella, se kulkee rataympyränsä kaaren, jonka päätepisteitä yhdistävä jana sivuaa maapallon poikkileikkausympyrää. Näkyvyysajan suhde kiertoaikaan on yhtä suuri kuin kaaren keskuskulman suhde täysikulmaan.)



234. 35 cm:n etäisyydellä
(Etiketti muodostaa pullon poikkileikkausympyrän 12,3 cm pitkän kaaren. Kun pulloa katsotaan lähimmästä kohdasta, josta etiketti näkyy kokonaan, näkösäteet sivuavat ympyrää kaaren päätepisteissä. Määritetään kaaren keskuskulma ja pullon säde ja lasketaan ensin silmän etäisyys ympyrän keskipisteestä. Laskussa joudutaan olettamaan, että silmä on piste, mikä ei aivan pidä paikkaansa. Tuloksen voisi siis antaa enemmänkin pyöristettynä.)

235. 170 km

236. **a)** 25 cm **b)** 17 cm

237. 35°

238. 4,7 km:n päähän
(Voidaan laskea viivasuora etäisyys katsojan silmistä näkökentän etäisimpään kohtaan.)

239. Voidaan.
(Näkökenttä ulottuu 150 km:n päähän Kajaanista.)

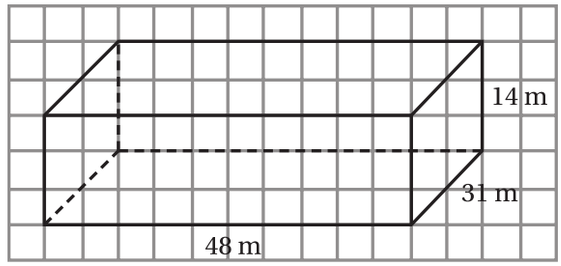
240. vähintään 27 km:n korkeuteen
(Tulee nähdä 580 km:n päähän. Ensin määritetään tämän pituista kaarta vastaava maapallon poikkileikkausympyrän keskuskulma.)

241. **a)** 382 000 km
b) 7,2 metrin etäisyydeltä

242. 6,20 cm
(Keskiympyrästä yhdelle pikkuympyrälle piirrettyjen tangenttien välien kulma on 45°. Voidaan muodostaa yhtälö, josta ratkaistaan pikkuympyrän säde.)

Suorakulmainen särmiö

243.



Rakennuksen tilavuus on 21 000 m^3.

244. **a)** 68 l
(Laatikon sisämitat ovat 6,4 dm, 4,4 dm ja 2,4 dm.)
b) 2,6 kg
(Styroksin tilavuus saadaan vähentämällä laatikon ulkotilavuudesta sisätilan tilavuus.)

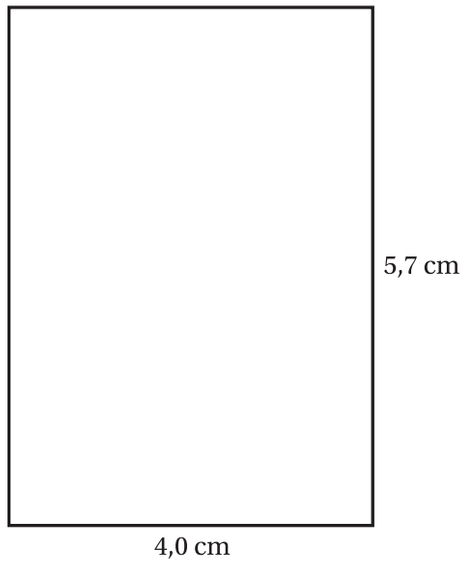
245. 700 cm

246. **a)** 14,6 cm **b)** 15,9 cm

247. 12,6 cm × 25,2 cm × 37,8 cm
(Merkitään särmiä x, $2x$ ja $3x$.)

248. 27 m

249. **a)** Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 4,0 cm ja 5,7 cm.



b) 71°
(Kulma on leikkauskuvion lävistäjien välinen kulma. Laskussa on käytettävä a-kohdan tulosta tarkempaa leikkauskuvion pitemmän sivun pituuden likiarvoa.)

250. **a)** vähintään 64 cm (tahkon lävistäjän pituus)
b) vähintään 78 cm (avaruuslävistäjän pituus)

251. Ennen peruskorjausta 43 m^3 ja peruskorjauksen jälkeen 32 m^3.
(Tilavuus peruskorjauksen jälkeen 4,2 m · 2,9 m · 2,6 m.)

252. **a)** 13 cm **b)** 2,4 dm^3 **c)** 11 dm^2
(b- ja c-kohdissa on käytettävä a-kohdan tulosta tarkempaa särmän pituuden likiarvoa.)

253. **a)** 11,3 cm
(kuution tahkon lävistäjän pituus)
b) 10 cm
(tahkojen lävistäjistä lyhimmän pituus)

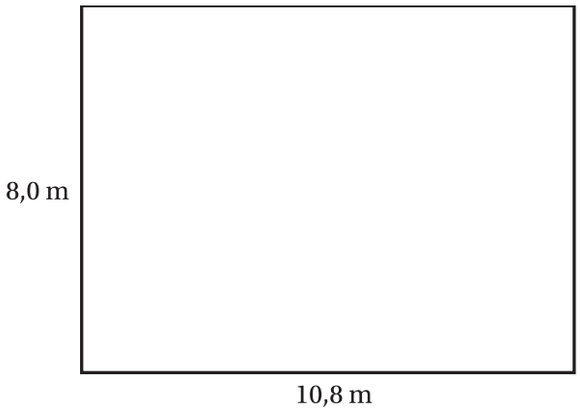
254. 8,7 cm

255. 8,1 m

256. 12,6 cm

257. leveys 4,1 cm, pituus 6,1 cm ja korkeus 8,1 cm
(1 dl = 0,1 l = 0,1 dm^3 = 100 cm^3. Merkitään särmien pituuksia $2x$, $3x$ ja $4x$.)

258. **a)** Leikkauskuvio on suorakulmio, jonka sivujen pituudet ovat 8,0 m ja 10,8 m.



Kuvion mittakaava on 1 : 200.
b) 53° **c)** 37°

Lieriö

259. **a)** On lieriö. Pohja on kolmio.
b) Ei ole lieriö.
c) On lieriö. Pohja on kahdeksankulmio.
d) Ei ole lieriö.

260. **a)** 15 dm^3
b) 27 m^3
(Lieriön pohja on kolmio ja korkeus 7,0 m.)

261. 490 l
(Vesikerros on lieriö, jonka pohjan pinta-ala on 120 m^2 = 12 000 dm^2 ja korkeus 4,1 mm = 0,041 dm.)

262. 7 m

263. 270 cm^2 (Pohjan piiri on 6 · 3,0 cm.)

264. **a)** 650 cm^3 **b)** 320 cm^2 **c)** 420 cm^2

265. 14 cm
(Pohjan pinta-ala on $A = \frac{V}{h} = \frac{2{,}0}{1{,}3}$ dm^2.)

266. 6,1 cm lieriön pohjasta
(12 cl = 0,12 l = 0,12 dm^3 = 120 cm^3. Lasketaan, kuinka korkea on suora ympyrälieriö, jonka tilavuus on 120 cm^3 ja pohjan halkaisijan pituus 5,0 cm.)

267. 351 cm^2
(Määritetään ensin pohjan pinta-ala $A = \frac{V}{h} = \frac{500}{10{,}0}$ cm^2 ja edelleen pohjan säde. Pellin tarve on lieriön kokonaispinta-ala.)

268. 0,64 mm
(Lasketaan vesimäärän tilavuus ja jaetaan suuaukon pinta-alalla.)

269. 51 m^3
(Oja on lieriö, jonka pohja on puolisuunnikas. Puolisuunnikkaan toisen yhdensuuntaisen sivun pituus lasketaan trigonometrian avulla: sivu on $10 + 2x$, missä $\tan 40° = \frac{80}{x}$.)

270. 1 900 l
(Öljykerros on lieriö, jonka pohja on ympyrän segmentti ja korkeus 3,5 m. Segmentin keskuskulman puolikas α saadaan trigonometrian avulla: $\cos\alpha = \frac{0{,}3}{0{,}8}$.)

271. 25 000

272. **a)** 68 m^2
(pohjan piiri $2 \cdot 6{,}2\text{ m} + 2 \cdot 4{,}5\text{ m}$ ja korkeus 3,2 m)
b) 53 m^2
(pohjan piiri $2 \cdot 5{,}8\text{ m} + 2 \cdot 4{,}1\text{ m}$ ja korkeus 2,7 m)

273. 10 cm
(Vesikerros on lieriö, jonka tilavuus on $8 \cdot 60 \cdot 18\ dm^3$ ja pohjan pinta-ala $85\ m^2 = 8\,500\ dm^2$. Lasketaan lieriön korkeus.)

274. 150 m^2:n alueelle

275. **a)** 7,1 l
b) 200 cm^3
(Pakkaus on lieriö, jonka pohja on suorakulmainen kolmio ja korkeus 16,0 cm.)

276. **a)** 380 kg
(Pölkyn tilavuus on 0,533 m^3.)
b) 3,0 m^2

277. 40 m^3

278. **a)** 8,4 m^2 **b)** 2,6 m^3

279. Mahtuu.
(Lieriön tilavuus on 1,04 litraa.)

280. 200 cm^2
($3\text{ dl} = 0{,}3\text{ l} = 0{,}3\ dm^3 = 300\ cm^3$)

281. **a)** 666 cm^2 **b)** 601 cm^2

282. 21 m
(Oikaistu kuparilanka on ympyrälieriö. Lieriön tilavuus on $\frac{0{,}34}{8960}\ m^3$. Langan pituus on lieriön tilavuus jaettuna pohjan (poikkileikkauksen) pinta-alalla.)

283. 5,6 mm

284. 96 l
(Vesi muodostaa lieriön, jonka pohja on ympyrän segmentti ja jonka korkeus on 4,8 m.)

Kartio

285. 60 cm
(Pythagoraan lause: $h^2 + 80^2 = 100^2$.)

286. 82 m

287. 5 m^3
(Kolmasosa pohjan pinta-alan ja korkeuden tulosta.)

288. **a)** 1 000 cm^3 **b)** 49 m^3

289. 240 m^2
(Vaipan pinta-ala on yhden vaippakolmion pinta-ala viisinkertaisena.)

290. **a)** 9,2 m **b)** 260 m^2

291. 47 m^2

292. **a)** 12 cl
(Kartion tilavuus on $120\ cm^3 = 0{,}12\ dm^3 = 0{,}12$ l.)
b) 1,5 cl
(Viini muodostaa suoran ympyräkartion, jonka korkeus on puolet lasin korkeudesta. Yhdenmuotoisista kolmioista nähdään, että pohjan halkaisija on myös puolet suuaukon halkaisijasta.)

293. **a)** 160 cm^3
(Kartion korkeus h ratkaistaan trigonometrian avulla: $\tan 63° = \frac{h}{4{,}3}$.)
b) 130 cm^2

294. 4,21 m^3
(Yhden vaippakolmion pinta-ala on 3,00 m^2. Ratkaistaan kolmion korkeus ja edelleen Pythagoraan lauseella pyramidin korkeus.)

295. 208°
(Keskuskulman suuruuden suhde täysikulman suuruuteen 360° on yhtä suuri kuin sektorin kaaren pituuden suhde ympyrän kehän pituuteen.)

296. 820 m^3
(Pohjasärmän puolikas ja vaippakolmion korkeus saadaan trigonometrian avulla. Pyramidin korkeus saadaan edelleen Pythagoraan lauseella.)

297. **a)** 8,8 m **b)** 220 m^3

298. 9,0 cm^3

299. **a)** 7,6 m **b)** 640 m^3

300. 240 m^2

301. **a)** 1,1 m **b)** 7,6 m^3 **c)** 23 m^2

302. 234 m^2

303. 60 m^2

304. 36 cm^3
(Pyramidin korkeus lasketaan käyttämällä kahdesti Pythagoraan lausetta. Ensin lasketaan joko pohjan lävistäjän pituus tai vaippakolmion huipusta piirretyn korkeusjanan pituus.)

305. **a)** 2,5 cm
(Kartion pohjaympyrän kehän pituus on puoliympyrän kaaren pituus.)
b) 4,3 cm
(Puoliympyrän säteestä tulee kartion sivujana, joten $h^2 + 2{,}5^2 = 5{,}0^2$.)
c) 28 cm^3

306. 270 cm^2
(Ratkaistaan ensin tötterön korkeus h. Jos yksikkönä on senttimetri, niin $h = \frac{3V}{A} = \frac{3 \cdot 500}{\pi \cdot 6{,}0^2}$. Sivujanan pituus saadaan Pythagoraan lauseella.)

307. **a)** 707 m^3
b) 19 m^3
(Vesikerros on suora ympyräkartio. Pohjan halkaisija ratkaistaan yhdenmuotoisista kolmioista.)

308. 9,60 m^2
(Ratkaistaan Pythagoraan lauseella ensin pohjan lävistäjän puolikas, sitten pohjasärmän pituus ja vaippakolmion korkeus.)

Pallo

309. 2 400 km

310. **a)** 111 km $(\frac{1°}{360°} \cdot 40\,000 \text{ km})$
b)

paikkakunta	kuljettu matka (km)
Helsinki	0
Kairo	3 300
Lusaka	8 300
etelänapa	16 700
Cooksaaret	24 400
Honolulu	28 900
pohjoisnapa	36 700
Helsinki	40 000

c) 11 100 km (40 000 km – 28 900 km)

311. 13 700 km
(Lasketaan 70. leveyspiirin pituus.)

312. **a)** 8,2 dm^3 **b)** 20 dm^2

313. **a)** 743 kg **b)** 1,37 kg

314. **a)** 6 800 m^3 **b)** 1 600 m^2

315. 1,97 m

316. 132 kg
(Yksiköksi kannattaa valita desimetri. Pallon ulkotilavuudesta (säde 4,40 dm) vähennetään sisätilavuus (säde 4,33 dm). Yksi kuutiodesimetri terästä painaa 7,85 kg.)

317. Pienenee 19,4 %.
(Kuution pinta-ala $A_K = 600\ \text{cm}^3$.
Pallon säde senttimetreinä saadaan, kun ratkaistaan r yhtälöstä $\frac{4\pi r^3}{3} = 1000$,
jolloin saadaan $r \approx 6{,}2035$ (cm).
Pallon pinta-ala $A_P \approx 483{,}6\ \text{cm}^2$.)

318. 81° pohjoista leveyttä
(Piirretään satelliitista maapallon isoympyrän tangentti. Lasketaan maapallon keskipisteestä satelliittiin ja sivuamispisteeseen kulkevien janojen välinen kulma.)

319. $\frac{2}{3} \approx 66{,}7\ \%$

320. $\frac{5}{9} \approx 0{,}56$
(Lieriön pohjan säde on $\sqrt{5}$.)

321. 10 000 km

322. **a)** 30 200 km
b) 14 300 km
($\frac{170°}{360°} \cdot 30\,200$ km, missä
$170° = 360° - (116° + 74°)$.
Kyseessä ei ole lyhin reitti Pekingistä New Yorkiin, sillä lyhin reitti kulkee pitkin paikkakuntien kautta kulkevaa isoympyrää.)

323. 47 %

324. **a)** 8,2 l **b)** 14 l

325. 73 cm

326. 270 cm^2
(Kahden puolipallon (eli yhden pallon) ja suoran ympyrälieriön vaipan yhteenlaskettu pinta-ala.)

327. 94,0 cm^3

328. 47,6 % (Pallon halkaisija on 10,0 cm.)

329. 12,1 cm
(Yksi kuutiodesimetri terästä painaa 7,850 kg. Kuulan tilavuus on $\frac{7{,}257}{7{,}850}\ \text{dm}^3 \approx 0{,}9245\ \text{dm}^3$.)

330. 57° pohjoista leveyttä

331. $\frac{8}{27} \approx 0{,}30$
(Pallon keskipiste jakaa kartion korkeusjanan osiin, joiden pituudet ovat 3 ja 1. Kartion pohjan säde on $\sqrt{8}$.)

Harjoituksia avaruusgeometriasta

332. 14 cm

333. 11 000 m^3
(Kanava on lieriö, jonka pohja on puolisuunnikas ja korkeus 150 m. Pohjan pinta-ala on $A = \frac{16{,}0 + 12{,}0}{2} \cdot 5{,}0\ (\text{m}^2)$.)

334. 1,7 dl

335. 85 cm^2
(Kolmion korkeus h voidaan ratkaista Pythagoraan lauseella tai trigonometrisesti.)

336. **a)** 130 cm^3
(Ympyrälieriön tilavuudesta vähennetään suoran ympyräkartion tilavuus.)
b) 150 cm^2
(Kokonaispinta-ala muodostuu pohjaympyrän pinta-alasta, lieriön vaipan pinta-alasta ja suoran ympyräkartion vaipan pinta-alasta.)

337. 84 m
(Pyramidi täydennetään ehjäksi ja halkaistaan huipun ja kahden vastakkaisen pohjasärmän keskipisteiden kautta kulkevalla tasolla. Katkaistun pyramidin katto erottaa leikkauskolmiosta pienemmän yhdenmuotoisen kolmion.)

338. **a)** 75 cm
(Yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö sivujanan ratkaisemiseksi.)
b) 33 dm^3
c) 23 dm^3
(Alkuperäisen kartion tilavuudesta vähennetään pienemmän kartion tilavuus.)

339. Merkitään puolipallon sädettä r. Kartion tilavuus on $\frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3}\pi r^3$. Puolipallon tilavuus on $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{2}{3}\pi r^3$.

340. 3,9 m
(Etäisyys on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka toinen kateetti on lattian lävistäjän puolikas ja toisen kateetin pituus on lampun etäisyys lattiasta.)

341. 270 m^2

342. 60 cm^3
(Pohjakolmion korkeusjanan pituus voidaan laskea Pythagoraan lauseella tai trigonometrian avulla, sillä tasasivuisen kolmion kulmien suuruus on 60°.)

343. enintään 4,4 cm korkeudelle

344. **a)** 630 cm^2
(Suora ympyräkartio, jonka sivujanan pituus on 17 cm ja pohjan halkaisija 16 cm. Koko pinnan ala on vaipan ja pohjan pinta-alojen summa.)
b) 1 600 cm^2
(Kahden samanlaisen suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala. Pohjan säde on kolmion korkeus 15 cm ja sivujana kolmion kylki 17 cm.)

345. 390 m^3
(Kaavasta $\pi rs = A$ ratkaistaan ensin kartion sivujanan pituus: $s = \frac{A}{\pi r} = \frac{280}{\pi \cdot 4{,}3}$. Kartion korkeus saadaan Pythagoraan lauseella.)

346. Pohjan halkaisija ja korkeus ovat 6,8 m.
(Jos x on pohjaympyrän säde, niin lieriön korkeus on $2x$. Ratkaistaan yhtälö $\pi x^2 \cdot 2x = 250$.)

347. 2,7 l
(Katkaistu kartio täydennetään kokonaiseksi. Kokonaisen kartion korkeus ratkaistaan yhdenmuotoisista kolmioista. Paistinpannun tilavuus on kahden kartion tilavuuksien erotus.)

Kertaustehtäviä

348. 14,8 cm
(Arkkien korkeuksien suhde on yhtä suuri kuin arkkien leveyksien suhde eli $\frac{x}{22{,}2} = \frac{11{,}5}{17{,}3}$.
Tai yhtäpitävästi: korkeuden suhde leveyteen on molemmissa arkeissa yhtä suuri eli $\frac{x}{11{,}5} = \frac{22{,}2}{17{,}3}$.)

349. **a)** 2,2 m
(Piirretään kuvio, jossa aikuisen puoleinen laudanpää on maassa. Yhdenmuotoista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{x}{0{,}85} = \frac{5{,}9}{2{,}3}$.)
b) 1,4 m
(Piirretään kuvio, jossa lapsen puoleinen laudanpää on maassa.)

350. $AB = 5$ ja $AC = 6\frac{2}{3}$

(Janan AB pituus x ratkaistaan yhtälöllä $\frac{x}{x-3} = \frac{5}{2}$ tai yhtälöllä $\frac{x}{5} = \frac{x-3}{2}$. Koska tehtävän luvuilla ei ole yksikköjä, ne ovat tarkkoja arvoja. Myös vastaukset on annettava tarkkoina arvoina, ei likiarvoina.)

351. 6,9 l

(Maalien määrien suhde on yhtä suuri kuin seinien pinta-alojen suhde, joka on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisuussuhteen neliö, siis $\frac{x}{36} = \left(\frac{3{,}5}{8{,}0}\right)^2$.)

352. 26 %

(Tasoon levitetyt lippikset ovat yhdenmuotoiset suhteessa $\frac{6{,}875}{8}$. Kankaan määrien suhde on yhtä suuri kuin yhdenmuotoisuussuhteen neliö $\left(\frac{6{,}875}{8}\right)^2 \approx 0{,}74 = 74\ \%$.)

353. **a)** 2,9 km

(Jos x on suon pituus senttimetreinä, niin $\frac{5{,}7}{x} = \frac{1}{50\ 000}$.)

b) 3,3 km^2

(Jos A on suon pinta-ala neliösenttimetreinä, niin $\frac{13}{A} = \left(\frac{1}{50\ 000}\right)^2$. Saadaan

$A = 3{,}25 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 = 32\ 500\ 000\ 000\ \text{cm}^2$
$= 325\ 000\ 000\ \text{dm}^2 = 3\ 250\ 000\ \text{m}^2$
$= 3{,}25\ \text{km}^2 \approx 3{,}3\ \text{km}^2$.)

354. $BC \approx 2{,}2$ cm ja $AC \approx 7{,}8$ cm

($\frac{BC}{AB} = \tan 16°$ ja $\frac{AB}{AC} = \cos 16°$)

355. **a)** 18° $\quad (\tan\alpha = \frac{1{,}6}{4{,}8})$

b) 70,5° $\quad (\cos\alpha = \frac{1{,}00}{3{,}00})$

356. 32°

(Kuvion avulla nähdään, että pienempi terävä kulma on lyhyemmän kateetin vastainen kulma.)

357. vähintään 30 km pitkällä

(Jos x on lyhimmän mahdollisen rataosuuden pituus metreinä, niin $\sin 0{,}5° = \frac{250}{x}$.)

358. vähintään 11 m pitkä

(Jos x on laiturin lyhin pituus metreinä, niin $\tan 6{,}2° = \frac{1{,}2}{x}$.)

359. 98,1°

(On laskettava kulman APB suuruus. Kulma voidaan laskea summana $\alpha + \beta$, missä α ja β ovat teräviä kulmia suorakulmaisissa kolmioissa, joiden kateetit ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Jos α on kulmista alempi ja β ylempi, niin $\tan\alpha = \frac{1}{2}$ ja $\tan\beta = \frac{3}{1}$.)

360. 11 cm^2

(Jos h on 7,2 cm:n pituiselle sivulle piirretyn korkeusjanan pituus, niin $\sin 77° = \frac{h}{3{,}1}$.)

361. **a)** 23,0 cm

(Jos x on kannan puolikas, niin $\sin 38{,}1° = \frac{x}{18{,}6}$.)

b) 168 cm^2

(Jos h on kolmion kannalle piirretty korkeus, niin $\cos 38{,}1° = \frac{h}{18{,}6}$.)

362. 170 m

(Katsojasta koneen päihin kulkevat janat ovat tasakylkisen kolmion kyljet. Kysytty etäisyys h on kolmion huipusta kannalle piirretyn korkeusjanan pituus, joten $\tan 6{,}5° = \frac{18{,}9}{h}$.)

363. 300 cm^2

(Säännöllinen yhdeksänkulmio muodostuu yhdeksästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta, joiden kannan pituus on 7,0 cm ja huippukulman suuruus $\frac{360°}{9} = 40°$.)

364. **a)** 15 $\quad (x^2 = 9^2 + 12^2)$

b) 10,2 m $\quad (x^2 + 8{,}2^2 = 13{,}1^2)$

365. 58 m

(Jos x on oikopolun pituus metreinä, niin $x^2 = 85^2 + 120^2$.)

366. 3,8 m^2

(Jos h on purjeen korkeus metreinä, niin $h^2 + 1{,}3^2 = 3{,}2^2$.)

367. **a)** piste A

(Pisteen A etäisyys origosta on $\sqrt{97} \approx 9{,}85$ ja pisteen B etäisyys $\sqrt{109} \approx 10{,}44$. Jana origosta pisteeseen A on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka kateettien pituudet ovat 9 ja 4.)

b) $\sqrt{50} \approx 7{,}1$

(Jana AB on hypotenuusa suorakulmaisessa kolmiossa, jonka koordinaattiakselien suuntaisten kateettien pituudet ovat 7 ja 1. Varsinainen vastaus on etäisyyden tarkka arvo $\sqrt{50}$. Likiarvo on laskettu havainnollistukseksi ja tarkistukseksi.)

368. Leveyden tulee olla pienempi kuin 1,46 m.

(Hyllykön lävistäjän tulee olla lyhyempi kuin 1,60 m. Jos lävistäjä on 1,60 m, niin hyllykön leveys x metreinä saadaan yhtälöstä $x^2 + 0{,}65^2 = 1{,}60^2$.)

369. 62 cm^2 $\quad (A = 11{,}9\text{ cm} \cdot 5{,}2\text{ cm})$

370. 10 m^2

(Suunnikkaan terävien kulmien suuruus on 25°. Jos h on 6,1 m:n pituiselle sivulle piirretyn korkeusjanan pituus, niin $\sin 25° = \frac{h}{3{,}9}$.)

371. 38 m^2 $\quad \left(A = \frac{6{,}0 + 9{,}0}{2} \cdot 5{,}0\text{ m}^2\right)$

372. 940 cm^2

(Kun lyhyemmän yhdensuuntaisen sivun päätepisteistä piirretään kohtisuorat pitemmälle sivulle, muodostuu kaksi samanlaista suorakulmaista kolmiota, joiden hypotenuusa on kylki ja toisen kateetin pituus on puolet yhdensuuntaisten sivujen pituuksien erotuksesta. Siis $h^2 + 7^2 = 25^2$, missä h on puolisuunnikkaan korkeus.)

373. 7,5

(Kolmio kehystetään suorakulmiolla, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Suorakulmion pinta-alasta 24 vähennetään kolmen suorakulmaisen kolmion alat 9, 6 ja 1,5.)

374. **a)** 5,8 cm

(Kun piirretään säteet jänteen päätepisteisiin, muodostuu tasakylkinen kolmio, jonka huipusta piirretyn korkeusjanan pituus on kysytty etäisyys. Siis $x^2 + 7{,}5^2 = 9{,}5^2$.)

b) 104°

(Jos α on kysytyn kulman puolikas, niin $\sin\alpha = \frac{7{,}5}{9{,}5}$.)

375. 8,8 m $\quad (5 \cdot \pi \cdot 56\text{ cm})$

376. **a)** 25,7 cm

(Kaaren pituus $b = \frac{115°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 12{,}8\text{ cm}$.)

b) 144°

(Kaaren keskuskulman α suhde täysikulmaan 360° on yhtä suuri kuin kaaren pituuden suhde ympyrän pituuteen, eli voidaan muodostaa verrantoyhtälö $\frac{\alpha}{360°} = \frac{32{,}1}{2\pi \cdot 12{,}8}$. Voidaan myös ratkaista α yhtälöstä $\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \cdot 12{,}8 = 32{,}1$.)

377. 1,8 m^2

(Poikkileikkausympyrän säde on $r = \frac{4{,}7}{2\pi} \approx 0{,}7480$ (m).)

378. 170 m

(Alueen säde r metreinä ratkaistaan yhtälöstä $\pi r^2 = 2\,300$, josta saadaan $r \approx 27{,}06$ (m).)

379. 33 km^2 $\quad \left(A = \frac{17°}{360°} \cdot \pi \cdot 15^2\text{ km}^2\right)$

380. 3,9 m^2

(Sektorin pinta-alasta $A_S = \frac{78°}{360°} \cdot \pi \cdot 4{,}5^2$ vähennetään kaaren päätepisteisiin piirrettyjen säteiden ja jänteen rajaaman tasakylkisen kolmion pinta-ala A_K. Tasakylkisen kolmion kannan puolikas x ratkaistaan yhtälöstä $\sin 39° = \frac{x}{4{,}5}$ ja kannalle piirretty korkeus h yhtälöstä $\cos 39° = \frac{h}{4{,}5}$.)

381. 15 km:n päähän
(Jos matka katsojan silmistä näkökentän etäisimpään kohtaan on x km, niin $x^2 + 6\,370^2 = 6\,370{,}018^2$.)

382. 126°
(Jos α on kysytyn kulman puolikas, niin $\cos\alpha = \frac{4{,}12}{9{,}06}$.)

383. 86 m
(Jos x on pallon keskipisteen etäisyys katsojasta metreinä, niin $\sin 0{,}26° = \frac{0{,}39}{x}$.)

384. vähintään 107 km:n korkeuteen
(Utsjoelle ja Hankoon piirrettyjen maapallon säteiden välinen kulma on $\frac{1\,160}{40\,000} \cdot 360°$ $= 10{,}44°$. Jos x on matalimman katsomiskohdan etäisyys maapallon keskipisteestä, niin $\cos 10{,}44° = \frac{6\,370}{x}$.)

385. **a)** 5,10 l
b) 31,4 cm
(Laatikon avaruuslävistäjän pituus, joka lasketaan soveltamalla kahdesti Pythagoraan lausetta.)

386. 47 tuntia
(Uima-altaan tilavuus on $2\,500\ \text{dm}^2 \cdot 17\ \text{dm} = 42\,500\ \text{dm}^3 = 42\,500$ l.)

387. 60 km^2
$\left(A = \frac{V}{h} = \frac{30\,000\ \text{m}^3}{0{,}0005\ \text{m}} = 60\,000\,000\ \text{m}^2\right)$

388. 96 l
(Vesikerros on suora ympyrälieriö, jonka pohjan säde on 3,5 dm ja korkeus 2,5 dm. Vesikerroksen tilavuus on $V = \pi \cdot 3{,}5^2 \cdot 2{,}5$ (dm^3).)

389. 5,1 kg
(Kuparin tilavuus kuutiosenttimetreinä on $\pi \cdot 2{,}5^2 \cdot 100 - \pi \cdot 2{,}1^2 \cdot 100$. Yksi kuutiosenttimetri kuparia painaa 8,9 g.)

390. 3,58 dm^3
(Lieriön pohjan säde $r = \frac{3{,}00}{2\pi}$ (dm).)

391. 479 cm^2
(Pohjan ja vaipan pinta-alojen summa. Astian korkeus on $h = \frac{V}{h} = \frac{1\,000}{\pi \cdot 5^2}$ (cm).)

392. 150 cm^2
(Tölkin pohjan pinta-ala on $A_P = \frac{200}{9{,}4} \approx 21{,}277$ (cm^2). Pohjan säde ratkaistaan yhtälöstä $\pi r^2 = \frac{200}{9{,}4}$.)

393. 7,8 m^3
(Kolmasosa pohjan pinta-alan 13 m^2 ja korkeuden 1,8 m tulosta.)

394. 230 dm^3
$\left(\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^2 \cdot 75 + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 40^2 \cdot 60\right)$

395. **a)** 3,47 m^3 $\left(V = \frac{1}{3} \cdot 2{,}34^2 \cdot 1{,}90\right)$
b) 10,4 m^2
(Vaippa muodostuu neljästä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta (kanta 2,34 m). Kolmioiden kannalle piirretty korkeus ratkaistaan Pythagoraan lauseella: $x^2 = 1{,}17^2 + 1{,}90^2$.)

396. **a)** 1 600 m^3
(Jos x on pohjaneliön sivun pituuden puolikas, niin $\tan 25° = \frac{6{,}4}{x}$.)
b) 830 m^2
(Jos h on vaippakolmion huipusta piirretty korkeus, niin $\sin 25° = \frac{6{,}4}{h}$.)

397. 18 dm^2
(Sivujanan pituus s ratkaistaan Pythagoraan lauseella: $s^2 = 12^2 + 45^2$.)

398. 9 400 km $\left(\frac{60° + 25°}{360°} \cdot 40\,000\ \text{km}\right)$

399. **a)** 10 000 km
(Puolet 60. leveyspiirin pituudesta. Jos r on 60. leveyspiirin säde, niin $\sin 30° = \frac{r}{6\,370}$.)
b) 6 700 km
(Pohjoisnavan kautta kulkevan maapallon isoympyrän kaaren pituus. Kaaren asteluku on $30° + 30° = 60°$.)
c) 33 300 km
(40 000 km – 6 700 km)

400. **a)** $1\,300\ \text{m}^3$ $\left(V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 8{,}5^3\right)$

b) $450\ \text{m}^2$ $\left(A = \frac{1}{2} \cdot 4\pi \cdot 8{,}5^2\right)$

401. $6{,}0\ \text{dm}^3$ (Jalkapallon säde on $\frac{71}{2\pi}$ cm.)

402. **a)** 8,2 cm

(Kappaleen tilavuus on $288\ \text{cm}^3$. Yhtälöstä $\frac{4\pi r^3}{3} = 288$ saadaan säde $r \approx 4{,}097$ (cm).)

b) pienenee 27 %

(Suorakulmaisen särmiön pinta-ala on $2 \cdot 12{,}0 \cdot 6{,}0 + 2 \cdot 12{,}0 \cdot 4{,}0 + 2 \cdot 6{,}0 \cdot 4{,}0 = 288\ (\text{cm}^2)$.

Pallon pinta-ala on noin $210{,}9\ \text{cm}^2$.)

Sarja A

1. 1,9 m laudan päästä

(Piirretään kuvio, jossa laudan toinen pää on maassa ja toinen pää 2,5 metrin korkeudessa. Jos x on tukipisteen etäisyys maassa olevasta päästä, niin yhdenmuotoisista kolmioista saadaan yhtälö $\frac{x}{0{,}80} = \frac{6{,}0}{2{,}5}$.)

2. 3,8 m

(Jos x (m) on talon harjan etäisyys maasta, niin $\tan 22° = \frac{x}{17}$. Jos y on antennin huipun etäisyys maasta, niin $\tan 32° = \frac{y}{17}$. Antennin pituus on $y - x$.)

3. $1\,800\ \text{m}^2$

(Alue on ympyrä. Ympyrän säde ratkaistaan Pythagoraan lauseella: $r^2 + 27^2 = 36^2$.)

4. $32{,}3\ \text{m}^2$

(Tasakylkisen puolisuunnikkaan korkeus saadaan Pythagoraan lauseella: $h^2 + 1{,}2^2 = 5{,}8^2$.)

5. $520\ \text{cm}^3$

(9,0 cm korkean särmiön tilavuudesta vähennetään pallon tilavuus.)

6. 2,3 m

(Allas ja laatoitus muodostavat ympyrän, jonka ala on $\pi \cdot 7{,}5^2 + 125 \approx 301{,}71\ (\text{m}^2)$. Määritetään ympyrän säde ja vähennetään siitä altaan säde 7,5 m. Toinen tapa on ratkaista laatoituksen leveys x toisen asteen yhtälöstä $\pi(7{,}5 + x)^2 - \pi \cdot 7{,}5^2 = 125$.)

Sarja B

1. **a)** 610 m
(Kolmion sivujen pituudet lasketaan Pythagoraan lauseella. Kolmion piiri on $\sqrt{10} + \sqrt{17} + 5 \approx 12{,}285$ koordinaatiston yksikköä.)
b) 1,6 ha
(Pinta-alan laskemiseksi kolmio kehystetään suorakulmiolla ja suorakulmion pinta-alasta vähennetään kolmen suorakulmaisen kolmion pinta-alat. Kolmion pinta-ala on 6,5 ruutua. Yhden ruudun pinta-ala on $2\,500\ \text{m}^2$.)

2. $1\,100\ \text{m}^2$
(Jos x (m) on pihan halkaisija, niin $\tan 12° = \frac{8{,}0}{x}$.)

3. Pohjan mitat ovat $41\ \text{cm} \times 41\ \text{cm}$. Mahtuu, sillä laukun avaruuslävistäjän pituus 67 cm on suurempi kuin sateenvarjon pituus.
(Pohjasärmän pituus ratkaistaan yhtälöstä $2x + 33 = 115$. Avaruuslävistäjän pituus lasketaan soveltamalla kaksi kertaa Pythagoraan lausetta.)

4. 7,2 cm
(Lieriön pohjan pinta-ala on $\frac{5\,000}{6{,}4} = 781{,}25\ (\text{cm}^2)$. Pallon tilavuus on $2{,}0 \cdot 781{,}25 = 1\,562{,}5\ (\text{cm}^3)$. Säteen pituus ratkaistaan yhtälöstä $\frac{4\pi r^3}{3} = 1\,562{,}5$. Huomaa, että tehtävässä ei ole kerrottu lieriön pohjan muotoa. Ratkaisussa lieriötä ei saa olettaa esimerkiksi ympyrälieriöksi.)

5. 16,0 cm
(Sivukuvassa kuutioiden yläreunan alapuolelle jää 8,0 cm pitkän jänteen rajaama segmentti ympyrästä, jonka säde on 5,0 cm. Kuutioiden yläreunan yläpuolelle jää siis ympyrän osa, jonka korkeus on jänteen etäisyys keskipisteestä (3,0 cm) lisättynä säteellä.)

6. $802\ \text{cm}^3$
(Pyramidin korkeusjana h on kateetti suorakulmaisessa kolmiossa, jonka toisen kateetin pituus on pohjaneliön sivun pituuden (vaippakolmion kannan pituuden) puolikas ja jonka hypotenuusa on vaippakolmion huipusta piirretty korkeusjana x. Tasakylkisen kolmion puolikkaasta saadaan $\tan 36{,}0° = \frac{8{,}6}{x}$ ja suorakulmaisesta kolmiosta $h^2 = x^2 - 8{,}6^2$.)

Sarja C

1. 19 km
(Jos aamupäivän matka on x, niin $x^2 + (3x)^2 = 15^2$. Koko matka on $4x$.)

2. **a)** 7,5 m
(Pituus ratkaistaan yhdenmuotoisista kolmioista.)
b) 26 %

3. 1,7 mm oikeata pituutta lyhyempi
(Olkoon x säännöllisen seitsenkulmion sivun oikean pituuden puolikas senttimetreinä. Tällöin $\sin\frac{360^\circ}{14} = \frac{x}{100}$. Seitsenkulmion sivun oikea pituus on $2x \approx 86{,}7767$ (cm). Jos y on sisään piirretyn tasasivuisen kolmion sivun puolikas, niin $\sin 60^\circ = \frac{y}{100}$. Saadaan $y \approx 86{,}6025$ cm.)

4. **a)** 14 000 km
(Jos r on 35. leveyspiirin säde, niin $\sin 55^\circ = \frac{r}{R}$, missä $R = \frac{40\,000}{2\pi}$ on maapallon säde. Saadaan $r \approx 5\,215$ (km). Ensin kuljetaan 29°:n kaari 180. pituuspiirille ja sitten 122°:n kaari, joten kysytty matka on $\frac{29^\circ + 122^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi r$.)
b) 12 000 km
(Alkumatka Sydneystä etelänavalle ja loppumatka etelänavalta Buenos Airesiin ovat molemmat $\frac{55^\circ}{360^\circ} \cdot 40\,000$ km.)

5. 21 km
(Golfkentältä piirretään kohtisuora hotellisaarta ja lentokenttää yhdistävälle janalle. Tällöin muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joista toisen kolmion hypotenuusan pituus on golfkentän etäisyys lentokentästä. Toisesta suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on 12 (km) ja molemmat terävät kulmat 45°, ratkaistaan kateettien pituudet 8,485 (km). Kolmiossa, jonka hypotenuusa kysytty etäisyys on, kateettien pituudet kilometreinä ovat 8,485 ja $28 - 8{,}485$.)

6. 13,9 km
(Olkoon C radan suorien osuuksien jatkeiden leikkauspiste. Tasakylkisen kolmion ABC huippukulman suuruus on $180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$. Kolmion kyljet AC ja BC sivuavat ympyrää kaaren päätepisteissä. Kaaren keskuskulman suuruus on 64° ja kaaren pituus $\frac{64^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2{,}1 \approx 2{,}3457$ (km). Suorien osuuksien jatkeiden pituus x saadaan yhtälöstä $\tan 32^\circ = \frac{x}{2{,}1}$, josta $x \approx 1{,}3122$ (km). Tasakylkisen kolmion kylkien AC ja BC pituus y saadaan yhtälöstä $\sin 58^\circ = \frac{6{,}0}{y}$, josta $y \approx 7{,}0751$ (km). Siis kummankin suoran osan pituus on $y - x \approx 5{,}7629$ (km) ja rautatien pituus $2 \cdot 5{,}7629$ km $+ 2{,}3457$ km.)

Hakemisto

avaruuslävistäjä 86

isoympyrä 111

kaaren pituus 68

kartio
- määritelmä ja nimityksiä 100
- tilavuus 103
- suoran ympyräkartion vaipan pinta-ala 105

kavaljeeriperspektiivi 85

kosini 29

kuutio 86

kuutiojuuri 88

leveyspiiri 112

lieriö
- määritelmä ja nimityksiä 91
- tilavuus 93
- suoran lieriön vaipan pinta-ala 93

maapallo 111

mittakaava 5

monikulmio 49

monikulmion kulmien summa 50

neljäkäs 55

pallo
- määritelmä 110
- tilavuus 115
- pinta-ala 115

pikkuympyrä 111

pituuspiiri 112

puolisuunnikas
- määritelmä 52
- pinta-ala 53

pyramidi 101

Pythagoraan lause 42

ristikulmat 15

samankohtaiset kulmat 15

segmentin pinta-alan laskeminen 75

segmentti 61

sektorin pinta-ala 73

sini 29

suorakulmainen särmiö 86

suunnikas
- määritelmä 51
- pinta-ala 51
- suunnikkaan ominaisuuksia 54

särmiö 92

säännöllinen monikulmio 62

tangentti 29

tasakylkinen kolmio 38

tasakylkinen puolisuunnikas..... 56

trigonometriset funktiot..... 30

vastinjana 5

vastinkulma..... 5

vinoneliö 55

yhdenmuotoisuus
kuvioiden yhdenmuotoisuus 5
kolmioiden yhdenmuotoisuuslause 13
yhdenmuotoisten kuvioiden
pinta-alojen suhde..... 22

yhdenmuotoisuussuhde 5

ympyrä
määritelmä ja nimityksiä..... 60
kehän pituus..... 67
pinta-ala 73

ympyrän sisään piirretty monikulmio 63

ympyrän tangentti 79

Valokuvien oikeudet

Kannen kuva: Sanoma Pro Oy

Anita Kokkila: s. 84
Panthermedia: s. 27, 89, 113
Sanoma Pro Oy: s. 99
Sanoma Pro Oy/Minna Eriksson: s. 12
Sanoma Pro Oy/Kari Hirvo: s. 36
Sanoma Pro Oy/Roope Permanto: s. 109
Suomen kuvapalvelu/Corbis/Spaces Images/Jeremy Woodhouse: s. 59

Pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköitä

Perusyksiköiden kerrannaiset ilmaistaan latinalaisperäisillä etuliitteillä.

etuliite	perusyksikön määrä
kilo	tuhat
desi	kymmenesosa
sentti	sadasosa
milli	tuhannesosa

Pituus

Perusyksikkö on metri (m). Kilometri on tuhat metriä, 1 km = 1 000 m. Peräkkäisten yksiköiden metri (m), desimetri (dm), senttimetri (cm) ja millimetri (mm) suhde on 10.

Esimerkiksi:

13 800 000 mm
= 1 380 000 cm
= 13 800 m
= 13,8 km

Pinta-ala

Koska peräkkäisten pituusyksiköiden metri (m), desimetri (dm), senttimetri (cm) ja millimetri (mm) suhde on 10, niin vastaavien pinta-alan yksiköiden suhde on $10 \cdot 10 = 100$.

Tavallisia neliömetriä suurempia kerrannaisyksikköjä ovat:

aari	$1\ \text{a} = 100\ \text{m}^2$
hehtaari	$1\ \text{ha} = 100\ \text{a} = 10\ 000\ \text{m}^2$
neliökilometri	$1\ \text{km}^2 = 100\ \text{ha} = 10\ 000\ \text{a}$ $= 1\ 000\ 000\ \text{m}^2 = 10^6\ \text{m}^2$

Esimerkiksi:

$0{,}00079\ \text{m}^2 = 0{,}079\ \text{dm}^2 = 7{,}9\ \text{cm}^2 = 790\ \text{mm}^2$

$29\ 000\ \text{m}^2 = 290\ \text{a} = 2{,}9\ \text{ha}$

Tilavuus

Koska peräkkäisten pituusyksiköiden metri (m), desimetri (dm), senttimetri (cm) ja millimetri (mm) suhde on 10, niin vastaavien tilavuuden yksiköiden suhde on $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\ 000$.

Esimerkiksi:

$5{,}4 \cdot 10^{-9}\ \text{m}^3 = 5{,}4 \cdot 10^{-6}\ \text{dm}^3 = 5{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}^3$
$= 0{,}0054\ \text{cm}^3 = 5{,}4\ \text{mm}^3$

Vetomitat

Tilavuus ilmaistaan joskus käyttämällä vetomittaa litra (l) ja sen kerrannaisyksiköitä desilitra (dl), senttilitra (cl) ja millilitra (ml), joiden suhde on 10.

$1\ \text{l} = 1\ \text{dm}^3$
$1\ \text{dl} = 0{,}1\ \text{l}$
$1\ \text{cl} = 0{,}01\ \text{l}$
$1\ \text{ml} = 0{,}001\ \text{l} = 1\ \text{cm}^3$

Esimerkiksi:

$9{,}6\ \text{cl} = 0{,}096\ \text{l} = 0{,}096\ \text{dm}^3 = 96\ \text{cm}^3$

$480\ \text{cm}^3 = 0{,}48\ \text{l} = 4{,}8\ \text{dl} = 48\ \text{cl}$